Προβλήματα Αρχικών Τιμών

Έστω $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση, και $y_0 \in \mathbb{R}$. Ένα τυπικό *πρόβλημα αρχικών τιμών* είναι:
Αναζητείται $y : [a, b] \to \mathbb{R}$, τέτοια ώστε

$$\begin{aligned} y'(t) &= f\big(t, y(t)\big), \quad a \le t \le b, \\ y(a) &= y_0. \end{aligned} \tag{1}$$

- f συνεχής $(t, y) \in [a, b] \times \mathbb{R}$. ($f \in C([a, b] \times \mathbb{R})$.)
- Η συνάρτηση y ορισμένη στο $[a, b]$, $y \in C^1[a, b]$, η οποία ικανοποιεί την (1) και την αρχική συνθήκη a$y(a) = y_0$, λέγεται *λύση* του ΠΑΤ (1).
- αν η f είναι m φορές συνεχώς παραγωγίσιμη στο $[a, b] \times \mathbb{R}$, τότε η λύση y είναι $m + 1$ συνεχώς παραγωγίσιμη στο $[a, b]$.

Χρόνος / Διακριτά χρονικά βήματα

Σκεφτόμαστε την μεταβλητή t ως χρόνο.
Οι αριθμητικοί αλγόριθμοι υπολογίζουν προσεγγίσεις σε *διακριτές χρονικές στιγμές:*

- Έστω
$$a = t^0 < t^1 < \cdots < t^N = b$$
μια διάμεριση του $[a, b]$.
- Θεωρούμε τους διακριτούς χρόνους t^n.
- Αναζητούμε προσεγγίσεις του y στους διακριτούς χρόνους t^n:
$$y(t^i), \quad i = 0, \dots, N.$$
- Συμβολισμός: Θα λέμε

  y^i την προσέγγιση του y η οποία προκύπτει από τον αριθμητικό μας αλγόρ
- Ή
$$y^i \approx y(t^i), \quad i = 0, \dots, N.$$

Υψηλής τάξης πολυβηματικές μέθοδοι

Σε αυτήν την παράγραφο θα εισαγάγουμε μια δεύτερη κατηγορία μεθόδων για την αριθμητική επίλυση προβλημάτων αρχικών τιμών, τις λεγόμενες πολυβηματικές μεθόδους. Ακριβέστερα, θα ασχοληθούμε με τις *γραμμικές* πολυβηματικές μεθόδους.
Θεωρούμε πάλι το εξής πρόβλημα αρχικών τιμών: Ζητείται συνάρτηση $y : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ τέτοια ώστε

$$\begin{aligned} y' &= f(t, y), \quad a \leqslant t \leqslant b, \\ y(a) &= y_0 \end{aligned} \tag{2}$$

με δεδομένο $y_0 \in \mathbb{R}^m$ και $f : [a, b] \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$. Έστω $N \in \mathbb{N}$, $h := \frac{b-a}{N}$ και $t^n := a + nh$, $n = 0, \dots, N$. Χάριν συντομίας, θα γράφουμε στη συνέχεια f^k αντί $f(t^k, y^k)$. Βασικές αρχές:

- προσεγγίσεις ενδιάμεσων σημείων του $[t^n, t^{n+1}]$
- κανόνες ολοκλήρωσης υψηλής τάξης
- *συνδυασμός ενδιάμεσων προσεγγίσεων με τους κανόνες ολοκλήρωσης υψηλής τάξης* για την κατασκευή της προσέγγισης y^{n+1} υψηλής τάξης ακρίβειας.

Πολυβηματικές μέθοδοι: γενική μορφή

Γενικά μια (γραμμική) $k-$*βηματική* μέθοδος για την αριθμητική επίλυση του προβλήματος (2) περιγράφεται από $2k+2$ σταθερές $\alpha_0, \dots, \alpha_k$, $\beta_0, \dots, \beta_k$, και είναι της μορφής

$$\begin{aligned} &y^0, y^1, \dots, y^{k-1} \quad \text{δεδομένα}, \\ &\alpha_k y^{n+k} + \alpha_{k-1} y^{n+k-1} + \cdots + \alpha_0 y^n = h\big(\beta_k f^{n+k} + \cdots + \beta_0 f^n\big), \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad n = 0, \dots, N-k. \end{aligned} \tag{3}$$

Θα υποθέτουμε συνήθως ότι $\alpha_k = 1$ και ότι $|\alpha_0| + |\beta_0| > 0$, έτσι ώστε να έχουμε πράγματι μια $k-$βηματική μέθοδο.

Πολυβηματικές μέθοδοι: γενική μορφή

Γενικά μια (γραμμική) $k-$*βηματική* μέθοδος για την αριθμητική επίλυση του προβλήματος (2) περιγράφεται από $2k+2$ σταθερές $\alpha_0, \dots, \alpha_k$, $\beta_0, \dots, \beta_k$, και είναι της μορφής

$$\begin{aligned} &y^0, y^1, \dots, y^{k-1} \quad \text{δεδομένα}, \\ &\alpha_k y^{n+k} + \alpha_{k-1} y^{n+k-1} + \cdots + \alpha_0 y^n = h\big(\beta_k f^{n+k} + \cdots + \beta_0 f^n\big), \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad n = 0, \dots, N-k. \end{aligned} \tag{4}$$

Θα υποθέτουμε συνήθως ότι $\alpha_k = 1$ και ότι $|\alpha_0| + |\beta_0| > 0$, έτσι ώστε να έχουμε πράγματι μια $k-$βηματική μέθοδο.

2-βηματικές μέθοδοι (Παραδείγματα)

Αν στο γενικό τύπο μιας πολυβηματικής μεθόδου (5) θέσουμε $k = 2$, προκύπτουν 2-βηματικές μέθοδοι,

$$
\begin{aligned}
&y^0, y^1 \quad \text{δεδομένα},\\
&\alpha_2 y^{n+2} + \alpha_1 y^{n+1} + \alpha_0 y^n = h\big(\beta_2 f^{n+2} + \beta_1 f^{n+1} + \beta_0 f^n\big), \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad n = 0, \dots, N-2.
\end{aligned} \tag{5}
$$

Παραδείγματα:

- $\alpha_2 = 1$, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_0 = -1$, $\beta_2 = 0$, $\beta_1 = 2$, $\beta_0 = 0$ (Μέθοδος μέσου)
- $\alpha_2 = 1$, $\alpha_1 = -1$, $\alpha_0 = 0$, $\beta_2 = 0$, $\beta_1 = \frac{3}{2}$, $\beta_0 = -\frac{1}{2}$ (Μέθοδος Adams-Bashforth (2))
- $\alpha_2 = 1$, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_0 = -1$, $\beta_2 = \frac{1}{3}$, $\beta_1 = \frac{4}{3}$, $\beta_0 = \frac{1}{3}$ (Μέθοδος Simpson)

2-βηματικές μέθοδοι (Επίλυση)

Η μέθοδος θα λέγεται *άμεση*: Ο προσδιορισμός του y^{n+2} γίνεται με απλή αντικατάσταση των γνωστών τιμών $y^{n+i}, i = 0, 1.$ Αν $\beta_2 \neq 0,$ η μέθοδος θα λέγεται *πεπλεγμένη*: Για τον προσδιορισμό του y^{n+2} απαιτείται η επίλυση μιας μη γραμμικής εξίσωσης της μορφής

$$y^{n+2} = h\beta_2 f(t^{n+2}, y^{n+2}) + g^n,$$

με γνωστό g^n.
Αν L είναι η σταθερά Lipschitz της f ως προς τη μεταβλητή y, και $h|\beta_k|L < 1,$ τότε, σύμφωνα με το θεώρημα της συστολής, το y^{n+2} ορίζεται μονοσήμαντα. Επίσης, στην περίπτωση που οι συντελεστές α_2 και β_2 είναι ομόσημοι και η f ικανοποιεί τη μονόπλευρη συνθήκη του Lipschitz, μπορούμε να αποδείξουμε, όπως ακριβώς στην περίπτωση της πεπλεγμένης μεθόδου του Euler, ότι οι προσεγγίσεις είναι καλά ορισμένες χωρίς να απαιτείται κάποιος περιορισμός στο βήμα h.

Σφάλμα συνέπειας

Υποθέτουμε ότι η λύση της ΣΔΕ $y,\ y' = f(t,y)$, είναι ομαλή συνάρτηση. Για $t \in [a, b-2h]$ ορίζουμε την ποσότητα

$$\big(L_h y\big)(t) := \sum_{j=0}^{2} \big[\alpha_j y(t+jh) - h\beta_j y'(t+jh)\big]. \tag{6}$$

Το *σφάλμα συνέπειας* ορίζεται ως,

$$E^n = \sum_{j=0}^{2} \big[\alpha_j y(t^{n+j}) - h\beta_j f\big(t^{n+j}, y(t^{n+j})\big)\big],$$

το οποίο γράφεται και στη μορφή

$$E^n = \sum_{j=0}^{2} \big[\alpha_j y(t^{n+j}) - h\beta_j y'(t^{n+j})\big] = \sum_{j=0}^{2} \big[\alpha_j y(t^n + jh) - h\beta_j y'(t^n + jh)\big].$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση αυτή το t^n με t οδηγούμαστε στο $\big(L_h y\big)(t)$.

Τάξη ακρίβειας πολυβηματικών μεθόδων

Ορισμός

(Τάξη ακρίβειας πολυβηματικής μεθόδου.)
Έστω $y : [a, b] \to \mathbb{R}$ μια τυχούσα, αρκετά ομαλή συνάρτηση. Αν p είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος, για τον οποίο υπάρχει σταθερά $\widetilde{C}$, ανεξάρτητη του h και του N, (η οποία εξαρτάται όμως από τα δεδομένα του προβλήματος και τις παραμέτρους της μεθόδου) έτσι ώστε

$$|(L_h y)(t)| \leqslant \widetilde{C} h^{p+1},$$

με $L_h y$ όπως ορίστηκε στην (6)*, τότε λέμε ότι η* τάξη ακρίβειας *της πολυβηματικής μεθόδου* (5) *είναι p. Αν η τάξη ακρίβειας μιας μεθόδου είναι τουλάχιστον ένα, η μέθοδος λέγεται* συνεπής*.*

- Σημειώστε ότι απαιτείται να ισχύει η παραπάνω σχέση για *κάθε* ΠΑΤ με αρκετά ομαλές συναρτήσεις f και y.

Έλεγχος της τάξης ακρίβειας πολυβηματικών μεθόδων

Αναπτύσσοντας κατά Taylor τις $y(t+jh)$ και $y'(t+jh)$ ως προς το σημείο t, λαμβάνουμε

$$\big(L_h y\big)(t) = C_0 y(t) + C_1 h y'(t) + C_2 h^2 y''(t) + \cdots$$

με σταθερές C_j ανεξάρτητες των y, t και h, και εξαρτώμενες μόνο από τη συγκεκριμένη μέθοδο. Είναι προφανές ότι η μέθοδος (5) έχει τάξη ακρίβειας p ακριβώς τότε, αν

$$C_0 = C_1 = \cdots = C_p = 0 \quad \text{και} \quad C_{p+1} \neq 0.$$