Προβλήματα Αρχικών Τιμών

Έστω $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση, και $y_0 \in \mathbb{R}$. Ένα τυπικό *πρόβλημα αρχικών τιμών* είναι: Αναζητείται $y : [a, b] \to \mathbb{R}$, τέτοια ώστε

$$\begin{aligned} & y'(t) = f\big(t, y(t)\big), \quad a \le t \le b, \\ & y(a) = y_0. \end{aligned} \tag{1}$$

- f συνεχής $(t, y) \in [a, b] \times \mathbb{R}$. ($f \in C([a, b] \times \mathbb{R})$.)
- Η συνάρτηση y ορισμένη στο $[a, b]$, $y \in C^1[a, b]$, η οποία ικανοποιεί την (1) και την αρχική συνθήκη $y(a) = y_0$, λέγεται *λύση* του ΠΑΤ (1).
- αν η f είναι m φορές συνεχώς παραγωγίσιμη στο $[a, b] \times \mathbb{R}$, τότε η λύση y είναι $m + 1$ συνεχώς παραγωγίσιμη στο $[a, b]$.

Χρόνος / Διακριτά χρονικά βήματα

Σκεφτόμαστε την μεταβλητή t ως χρόνο.
Οι αριθμητικοί αλγόριθμοι υπολογίζουν προσεγγίσεις σε *διακριτές χρονικές στιγμές:*

- Έστω
$$a = t^0 < t^1 < \cdots < t^N = b$$
μια διάμεριση του $[a, b]$.
- Θεωρούμε τους διακριτούς χρόνους t^n.
- Αναζητούμε προσεγγίσεις του y στους διακριτούς χρόνους t^n:
$$y(t^i), \quad i = 0, \ldots, N.$$
- Συμβολισμός: Θα λέμε

  y^i την προσέγγιση του y η οποία προκύπτει από τον αριθμητικό μας αλγόρ
- Ή
$$y^i \approx y(t^i), \quad i = 0, \ldots, N.$$

Η Άμεση μέθοδος του Euler

Χρησιμοποιούμε μια ομοιόμορφη διάμεριση, δηλαδή,

- $N \in \mathbb{N}$, ορίζουμε $h := (b - a)/N$ να είναι το βήμα διακριτοποίησης στο χρόνο (time step) και $t^i := a + ih, i = 0, \ldots, N$.
- Τότε $t^{n+1} - t^n = h$.

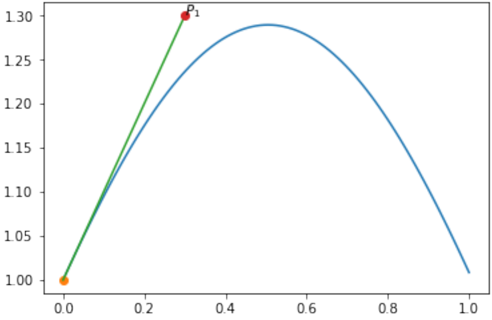
Η Άμεση μέθοδος του Euler δίδει προσεγγίσεις $y^1, \ldots, y^N$, οι οποίες ικανοποιούν

$$y^{n+1} = y^n + hf(t^n, y^n), \quad n = 0, \ldots, N - 1, \tag{2}$$

όπου $y^0 := y_0$ όπως στην (1). Η μέθοδος καλείται άμεση δεδομένου ότι το y^{n+1} μπορεί να υπολογισθεί κατευθείαν (άμεσα) ως προς το y^n, ή διαφορετικά, ο υπολογισμός του y^{n+1} δεν απαιτεί την επίλυση κάποιας εξίσωσης όπως άλλες μέθοδοι που θα δούμε στην συνέχεια.

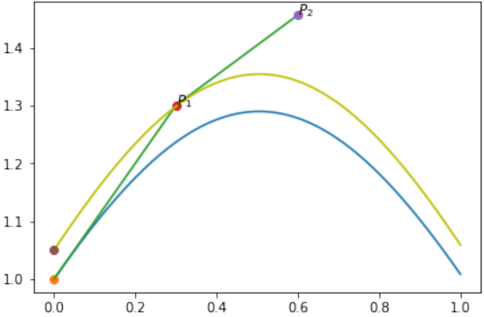
- μέθοδος *ενός βήματος*
- δεδομένου του y^n η μέθοδος περιγράφει μια διαδικασία για τον υπολογισμό του y^{n+1}
- διακριτή χρονική εξέλιξη

Η Άμεση μέθοδος του Euler: Γεωμετρική ερμηνεία



Υπολογισμός του σημείου $P_1 = (t^1, y^1)$ με τη μέθοδο του Euler $y^1 = y^0 + hf(t^0, y^0)$, με τη “μπλε” γραμμή η γραφική παράσταση της ακριβούς λύσης $y(t)$ και με την “κόκκινη” η εφαπτομένη στο γράφημα της $y(t)$ στο σημείο (t^0, y^0)

Η Άμεση μέθοδος του Euler: Γεωμετρική ερμηνεία



Υπολογισμός του σημείου $P_2 = (t^2, y^2)$ με τη μέθοδο του Euler $y^2 = y^1 + hf(t^1, y^1)$, με τη "μπλε" και "κίτρινη" γραμμή η γραφική παράσταση της ακριβούς λύσης $y(t)$ για διαφορετικές αρχικές τιμές. Με την "κόκκινη" η εφαπτομένη στο γράφημα της $y(t)$ (για αρχική τιμή διαφορετική από y^0) στο σημείο (t^1, y^1)