# Ευστάθεια – Βασική ευστάθεια: Euler

Έστω ότι τα $y^n, z^n, 0 \leq n \leq N$, δίδονται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} y^{n+1} &= y^n + hf(t^n, y^n), \quad 0 \leq n \leq N-1, \\ y^0 &= y_0, \end{aligned} \tag{1}$$

και

$$\begin{aligned} z^{n+1} &= z^n + hf(t^n, z^n), \quad 0 \leq n \leq N-1, \\ z^0 &= z_0, \end{aligned} \tag{2}$$

με αρχικές τιμές $y_0, z_0 \in \mathbb{R}$.

- Θέλουμε να εκτιμήσουμε το $|y^n - z^n|$ ως προς $|y_0 - z_0|$.

# Ευστάθεια – Βασική ευστάθεια: Euler II

Θα δείξουμε ότι αν η $f$ ικανοποιεί την Ολική Συνθήκη Lipschitz τότε

$$\max_{1 \le n \le N} |y^n - z^n| \le C|y_0 - z_0|, \tag{3}$$

με $C = e^{L(t^n - a)}$.

# Ευστάθεια – Βασική ευστάθεια: Euler : Απόδειξη

*Απόδειξη.*
Αφαιρώντας κατά μέλη τις (2) και (1), λαμβάνουμε

$$y^{n+1} - z^{n+1} = y^n - z^n + h\big[f(t^n, y^n) - f(t^n, z^n)\big].$$

Από την τριγωνική ανισότητα και την Ολική Συνθήκη- Lipschitz, έχουμε

$$|y^{n+1} - z^{n+1}| \le |y^n - z^n| + hL|y^n - z^n|, \quad n = 0, \dots, N-1,$$

Συνεπώς, επαγωγικά,

$$|y^n - z^n| \le (1 + hL)^n |y^0 - z^0| \le e^{hLn} |y^0 - z^0|, \quad n = 1, \dots, N. \tag{4}$$

Δηλαδή,

$$|y^n - z^n| \le e^{L(t^n - a)} |y_0 - z_0|, \quad n = 0, \dots, N, \tag{5}$$

και

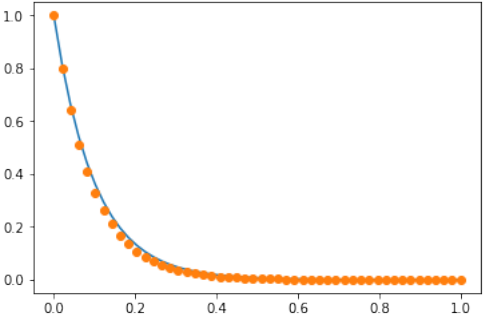
$$\max_{0 \le n \le N} |y^n - z^n| \le e^{L(b-a)} |y_0 - z_0|, \tag{6}$$

# Παράδειγμα

Θεωρούμε το ΠΑΤ

$$y'(t) = \lambda y(t), \quad t \geq 0, \quad y(0) = 1$$

με $\lambda = -10$ και εφαρμόζουμε τη μέθοδο του Euler με βήμα $h = 1/50$.



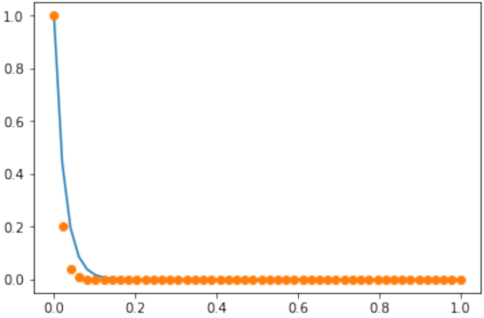

Σχήμα: Με κουκίδες οι προσεγγίσεις με τη μέθοδο του Euler και με τη συνεχή γραμμή η ακριβής λύση

# Παράδειγμα

Θεωρούμε τώρα το ΠΑΤ

$$y'(t) = \lambda y(t), \quad t \geq 0, \quad y(0) = 1$$

με $\lambda = -40$ και εφαρμόζουμε τη μέθοδο του Euler με βήμα $h = 1/50$.



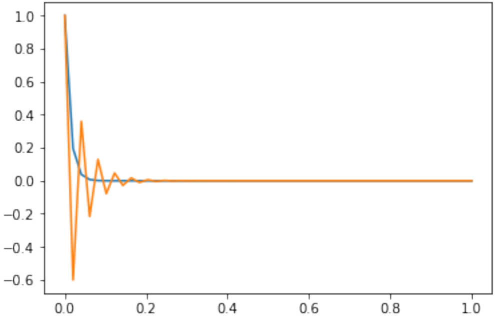

Σχήμα: Με κουκίδες οι προσεγγίσεις με τη μέθοδο του Euler και με τη συνεχή γραμμή η ακριβής λύση

# Παράδειγμα

Θεωρούμε τώρα το ΠΑΤ

$$y'(t) = \lambda y(t), \quad t \geq 0, \quad y(0) = 1$$

με $\lambda = -80$ και εφαρμόζουμε τη μέθοδο του Euler με βήμα $h = 1/50$.



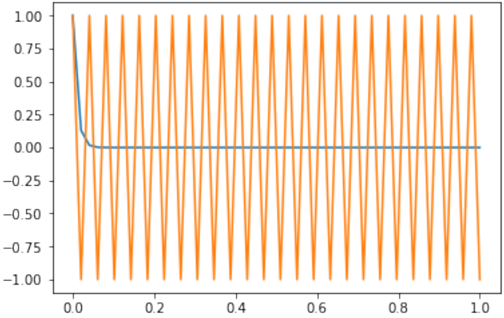

Σχήμα: Με ”πορτοκάλι” οι προσεγγίσεις με τη μέθοδο του Euler και με ”μπλε” η ακριβής λύση

# Παράδειγμα

Θεωρούμε τώρα το ΠΑΤ

$$y'(t) = \lambda y(t), \quad t \geq 0, \quad y(0) = 1$$

με $\lambda = -100$ και εφαρμόζουμε τη μέθοδο του Euler με βήμα $h = 1/50$.



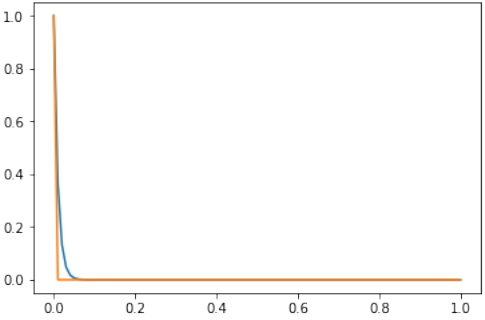

Σχήμα: Με ”πορτοκάλι” οι προσεγγίσεις με τη μέθοδο του Euler και με ”μπλε” η ακριβής λύση

# Παράδειγμα

Για το ίδιο ΠΑΤ

$$y'(t) = \lambda y(t), \quad t \geq 0, \quad y(0) = 1$$

με $\lambda = -100$ εφαρμόζουμε τη μέθοδο του Euler με βήμα $h = 1/100$. Και παρατηρούμε σημαντική βελτίωση.



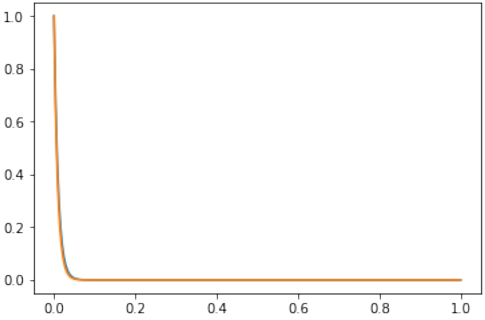

Σχήμα: Με "πορτοκάλι" οι προσεγγίσεις με τη μέθοδο του Euler και με "μπλε" η ακριβής λύση

# Παράδειγμα

Για το ίδιο ΠΑΤ

$$y'(t) = \lambda y(t), \quad t \geq 0, \quad y(0) = 1$$

με $\lambda = -100$ εφαρμόζουμε τη μέθοδο του Euler με βήμα $h = 1/500$. Και παρατηρούμε σημαντική βελτίωση.



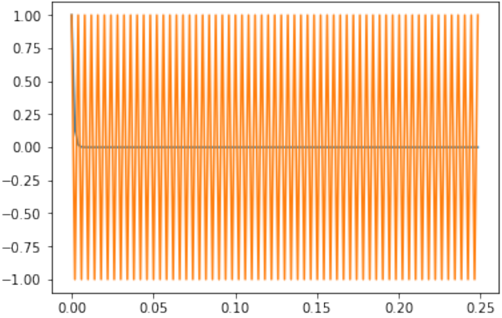

Σχήμα: Με ”πορτοκάλι” οι προσεγγίσεις με τη μέθοδο του Euler και με ”μπλε” η ακριβής λύση

# Παράδειγμα

Για το ΠΑΤ όμως

$$y'(t) = \lambda y(t), \quad t \geq 0, \quad y(0) = 1$$

με $\lambda = -1000$ και βήμα $h = 1/500$.




Σχήμα: Με ”πορτοκάλι” οι προσεγγίσεις με τη μέθοδο του Euler και με ”μπλε” η ακριβής λύση

# Προχωρημένες έννοιες Ευστάθειας Stability – Απολυτη Ευστάθεια

## Ορισμός

*(**Απόλυτη Ευστάθεια** ) Μια μέθοδος λέγεται* Απόλυτα ευσταθής, *αν, όταν εφαρμόζεται σε προβλήματα της μορφής*

$$y'(t) = \lambda y(t)$$

*όπου ο συντελεστής* $\lambda \in \mathbb{C}$ *ικανοποιεί* $Re\lambda \leq 0$, *δίδει προσεγγίσεις* $y^n$, *και η ακολουθία* $\|y^n\|, n = 0, \ldots, N$, *είναι πάντα φραγμένη*

$$|y^n| \leq C \tag{7}$$

# Ευστάθεια μεθόδου Euler

Η άμεση μέθοδος Euler για το πρόβλημα $y'(t) = \lambda y(t)$ είναι, $y^{n+1} = y^n + h\lambda y^n$, δηλαδή,

$$y^{n+1} = r(h\lambda)y^n, \quad \text{με} \quad r(z) := 1 + z, \tag{8}$$

συνεπώς

$$|y^{n+1}| = |1 + h\lambda|\,|y^n|. \tag{9}$$

Παρατηρούμε οτι ο μιγαδικός αριθμός $h\lambda$ ανήκει στο μη-θετικό ημιεπίπεδο (δεδομένου ότι $Re\ \lambda \leq 0$). Αν βρίσκεται έξω από τον μοναδιαίο δίσκο με κέντρο το σημείο $-1$, τότε $|1 + h\lambda| > 1$, οπότε αν το $y^n \neq 0$,

$$|y^{n+1}| > |y^n|.$$

# Ευστάθεια – για ποια $h\lambda$ μέθοδος Euler είναι ευσταθής;

Η άμεση μέθοδος Euler για το πρόβλημα $y'(t) = \lambda y(t)$ ικανοποιεί

$$|y^{n+1}| = |1 + h\lambda|\,|y^n|. \tag{10}$$

- όταν $h\lambda$ βρίσκεται στον μοναδιαίο δίσκο με κέντρο $-1$ τότε $|1 + h\lambda| \leq 1$ άρα,
$$|y^{n+1}| \leq |y^n|.$$

# Ευστάθεια – Χωρίο Ευστάθειας

## Ορισμός

*Θεωρούμε το πρόβλημα*

$$y'(t) = \lambda y(t),$$

*όπου το* $\lambda$ *είναι σταθερός μιγαδικός συντελεστής. Υποθέτουμε ότι η εξίσωση διακριτοποιείται από μια μονοβηματική μέθοδο με σταθερό βήμα* $h$*. Το Χωρίο Ευστάθειας* $S$ *της μεθόδου, αποτελείται από όλα τα* $h\lambda = z \in \mathbb{C}$ *για τα οποία οι προσεγγίσεις* $y^n$ *ικανοποιούν* $|y^n|, n = 0, \ldots,$ *είναι φραγμένη ακολουθία:*

$$|y^n| \leq C, \quad n = 0, \ldots . \tag{11}$$

*Η τομή του* $S$ *με τον άξονα των πραγματικών αριθμών λέγεται* Διάστημα Ευστάθειας *της μεθόδου.*