# Πεπλεγμένη ή Έμμεση Euler

Θεωρούμε την μέθοδο *Πεπλεγμένη Euler* ή διαφορετικά *Έμμεση Euler*.
Η μέθοδος δίδει προσεγγίσεις $y^m$ των $y(t^m)$ οι οποίες ικανοποιούν

$$y^{n+1} = y^n + hf(t^{n+1}, y^{n+1}), \quad n = 0, \ldots, N-1, \tag{1}$$

με αρχική τιμή $y^0 := y_0$.

Στην (1) η άγνωστη $y^{n+1}$ ορίζεται έμμεσα ως λύση μιας (γενικά) μη γραμμικής εξίσωσης, και γι' αυτό η μέθοδος λέγεται Έμμεση.
Η μέθοδος μειονεκτεί , σε σχέση με την άμεση Euler, ως προς το υπολογιστικό κόστος. ΄Ομως, η Έμμεση Euler έχει καλύτερες ιδιότητες ευστάθειας για μια κατηγορία σημαντικών προβλημάτων.

# Έμμεση Euler : Σχεδιασμός

Θεωρούμε , το ΠΑΤ στο σημείο $t^{n+1}$,

$$y'(t^{n+1}) = f\big(t^{n+1}, y(t^{n+1})\big),$$

και προσεγγίζουμε το $y'(t^{n+1})$ από το πηλίκο διαφορών

$$\frac{1}{h}\big[y(t^{n+1}) - y(t^n)\big],$$

καταλλήγουμε

$$\frac{1}{h}\big[y(t^{n+1}) - y(t^n)\big] \approx f\big(t^{n+1}, y(t^{n+1})\big).$$

Αντικαθιστώντας τα $y(t^m)$ από $y^m$ και το $\approx$ από $=$, οδηγούμαστε στην σχέση

$$\frac{y^{n+1} - y^n}{h} = f(t^{n+1}, y^{n+1}),$$

δηλαδή, (1).

# Έμμεση Euler : μπορεί να υπολογισθεί το $y^{n+1}$ ;

Δεδομένου ότι η μέθοδος είναι έμμεση, η ύπαρξη και μοναδικότητα της $y^{n+1}$ ως λύση της (1) δεν είναι προφανής.
Παράδειγμα. Χωρίς έξτρα υποθέσεις για την $f$ και το $h$, υπάρχουν παραδείγματα όπου η ύπαρξη και μοναδικότητα της $y^{n+1}$ δεν ισχύει.
Έστω $f(t, y) = \lambda y$, όπου ο $\lambda$, πραγματικός αριθμός. Η (1) γίνεται $y^{n+1} = y^n + h\lambda y^{n+1}$, άρα

$$(1 - \lambda h)y^{n+1} = y^n. \tag{2}$$

Έστω $\lambda > 0$ και ότι $h = 1/\lambda$. Τότε, άν $y^n \neq 0$ η εξίσωση (2) δεν έχει λύση, ενώ στην περίπτωση που $y^n = 0$ οποιοδήποτε $y^{n+1} \in \mathbb{R}$ είναι λύση της (2).

# Προχωρημένες έννοιες Ευστάθειας Stability – Απολυτη Ευστάθεια

## Ορισμός

*(**Απόλυτη Ευστάθεια** ) Μια μέθοδος λέγεται* Απόλυτα ευσταθής*, αν, όταν εφαρμόζεται σε προβλήματα της μορφής*

$$y'(t) = \lambda y(t)$$

*όπου ο συντελεστής* $\lambda \in \mathbb{C}$ *ικανοποιεί* $Re\lambda \leq 0$, *δίδει προσεγγίσεις* $y^n$, *και η ακολουθία* $\|y^n\|, n = 0, \ldots, N$, *είναι πάντα φραγμένη*

$$|y^n| \leq C \tag{3}$$

# Ευστάθεια – Η Έμμεση Euler είναι Απόλυτα ευσταθής

Εφαρμόζοντας την μέθοδο στο πρόβλημα $y'(t) = \lambda y(t)$, έχουμε

$$y^{n+1} = y^n + h\lambda y^{n+1},$$

$$y^{n+1} = r(h\lambda)y^n, \quad \text{with} \quad r(z) := \frac{1}{1-z}. \tag{4}$$

Προκύπτει ότι το πεδίο ευστάθειας $S$ της μεθόδου είναι

$$S = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| \geq 1\},$$

το οποίο είναι το εξωτερικό του μοναδιαίου δίσκου με κέντρο το $1$. Συνεπώς, η Έμμεση Euler είναι Απόλυτα ευσταθής για κάθε $\lambda$, $Re(\lambda) < 0$.