Πεπλεγμένη ή Έμμεση Euler

Θεωρούμε την μέθοδο *Πεπλεγμένη Euler* ή διαφορετικά *Έμμεση Euler*.
Η μέθοδος δίδει προσεγγίσεις y^m των $y(t^m)$ οι οποίες ικανοποιούν

$$y^{n+1} = y^n + hf(t^{n+1}, y^{n+1}), \quad n = 0, \ldots, N-1, \tag{1}$$

με αρχική τιμή $y^0 := y_0$.

Στην (6) η άγνωστη y^{n+1} ορίζεται έμμεσα ως λύση μιας (γενικά) μη γραμμικής εξίσωσης, και γι' αυτό η μέθοδος λέγεται Έμμεση.
Η μέθοδος μειονεκτεί , σε σχέση με την άμεση Euler, ως προς το υπολογιστικό κόστος. Όμως, η Έμμεση Euler έχει καλύτερες ιδιότητες ευστάθειας για μια κατηγορία σημαντικών προβλημάτων.

Έμμεση Euler : μπορεί να υπολογισθεί το y^{n+1} ;

Δεδομένου ότι η μέθοδος είναι έμμεση, η ύπαρξη και μοναδικότητα της y^{n+1} ως λύση της (6) δεν είναι προφανής.
Παράδειγμα. Χωρίς έξτρα υποθέσεις για την f και το h, υπάρχουν παραδείγματα όπου η ύπαρξη και μοναδικότητα της y^{n+1} δεν ισχύει.
Έστω $f(t, y) = \lambda y$, όπου ο λ, πραγματικός αριθμός. Η (6) γίνεται $y^{n+1} = y^n + h\lambda y^{n+1}$, άρα

$$(1 - \lambda h)y^{n+1} = y^n. \tag{2}$$

Έστω $\lambda > 0$ και ότι $h = 1/\lambda$. Τότε, άν $y^n \neq 0$ η εξίσωση (2) δεν έχει λύση, ενώ στην περίπτωση που $y^n = 0$ οποιοδήποτε $y^{n+1} \in \mathbb{R}$ είναι λύση της (2).

Έμμεση Euler : ύπαρξη και μοναδικότητα της y^{n+1}

Υποθέτουμε ότι η f ικανοποιεί την Ολική Συνθήκη Lipschitz .

Θεωρούμε την συνάρτηση g,

$$g(x) := y^n + hf(t^{n+1}, x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Προφανώς, το y^{n+1} είναι λύση της (6), αν και μόνο αν είναι σταθερό σημείο της g :

$$y^{n+1} = g(y^{n+1})\,.$$

Θα μελετήσουμε κάτω από ποιες προϋποθέσεις η g έχει ακριβώς ένα σταθερό σημείο.
Από την συνθήκη Lipschitz, έχουμε[1]

$$\big|g(x_1) - g(x_2)\big| \leq hL|x_1 - x_2|, \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R},$$

Τότε για h κατάλληλα μικρό έτσι ώστε $hL < 1$, η συνάρτηση g είναι συστολή στο $\mathbb{R}$, και συνεπώς έχει μοναδικό σταθερό σημείο, την λύση y^{n+1} της (6).

---

[1] Διαβάστε: Θεωρημα Σταθερού Σημείου του Banach / Αριθμητική Ανάλυση -Ακρίβης-Δουγαλής

Έμμεση Euler : ύπαρξη και μοναδικότητα της y^{n+1} : II

Υποθέτουμε ότι η f ικανοποιεί την Μονόπλευρη Συνθήκη Lipschitz:

$$\big(f(t,y_1)-f(t,y_2)\big)(y_1-y_2)\leq 0,\quad t\in[a,b],\ \ y_1,y_2\in\mathbb{R}. \tag{3}$$

Θεωρούμε την συνάρτηση $\tilde{g}$,

$$\tilde{g}(x):=x-y^n-hf(t^{n+1},x),\quad x\in\mathbb{R}.$$

Η y^{n+1} είναι λύση της (6), αν και μόνο αν είναι ρίζα της $\tilde{g}$. Παρατηρούμε τώρα τα εξής:

- $f(t^{n+1},\cdot)$ είναι φθίνουσα και άρα η $\tilde{g}$ αύξουσα. (Άρα έχει το πολύ μια ρίζα).
- $f(t^{n+1},\cdot)$ είναι φθίνουσα. Για $x\leq 0$, θα ισχύει $\tilde{g}(x)\leq x-y^n-hf(t^{n+1},0)$, συνεπώς $\tilde{g}(x)\to-\infty$ καθώς $x\to-\infty$.
- Για $x\geq 0$, θα ισχύει $\tilde{g}(x)\geq x-y^n-hf(t^{n+1},0)$, συνεπώς $\tilde{g}(x)\to\infty$ καθώς $x\to\infty$.

Επειδή η $\tilde{g}$είναι συνεχής, το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής συνεπάγεται ότι η g εχει τουλάχιστον μια ρίζα και άρα, η y^{n+1} υπάρχει ως λύση της (6). Σημειώστε ότι δεν έχουμε κανένα περιορισμό για την παράμετρο διακριτοποίησης h.

Ευστάθεια – Έμμεση Euler

Η Έμμεση Euler ευσταθής . Έστω ότι τα $y^n, z^n, 0 \leq n \leq N$, δίδονται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} y^{n+1} &= y^n + hf(t^{n+1}, y^{n+1}), \quad 0 \leq n \leq N-1, \\ y^0 &= y_0, \end{aligned} \tag{4}$$

και

$$\begin{aligned} z^{n+1} &= z^n + hf(t^{n+1}, z^{n+1}), \quad 0 \leq n \leq N-1, \\ z^0 &= z_0, \end{aligned} \tag{5}$$

με αρχικές τιμές $y_0, z_0 \in \mathbb{R}$.

- Θέλουμε να εκτιμήσουμε το $|y^n - z^n|$ ως προς $|y_0 - z_0|$.

Ευστάθεια – Βασική ευστάθεια: Έμμεση Euler

Υποθέτουμε ότι η f ικανοποιεί την Ολική Συνθήκη Lipschitz. Αφαιρώντας κατά μέλη τις (4) και (5), λαμβάνουμε

$$y^{n+1} - z^{n+1} = y^n - z^n + h\big[f(t^{n+1}, y^{n+1}) - f(t^{n+1}, z^{n+1})\big]. \tag{6}$$

Από την τριγωνική ανισότητα και την Ολική Συνθήκη Lipschitz, έχουμε

$$|y^{n+1} - z^{n+1}| \leq |y^n - z^n| + hL|y^{n+1} - z^{n+1}|, \quad n = 0, \dots, N-1,$$

Υποθέτουμε ότι το h είναι κατάλληλα μικρό, έτσι ώστε $Lh \leq 1/2$,

$$|y^{n+1} - z^{n+1}| \leq \frac{1}{1 - Lh}|y^n - z^n|, \quad n = 0, \dots, N-1.$$

Ευστάθεια – Βασική ευστάθεια: Έμμεση Euler II

Τώρα για $Lh \leq 1/2$, ισχύει

$$\frac{1}{1 - Lh} \leq 1 + 2Lh,$$

Συνεπώς

$$|y^{n+1} - z^{n+1}| \leq (1 + 2Lh)|y^n - z^n|, \quad n = 0, \dots, N - 1,$$

άρα επαγωγικά,

$$|y^n - z^n| \leq (1 + 2hL)^n |y^0 - z^0| \leq e^{2hLn} |y^0 - z^0|, \quad n = 1, \dots, N. \tag{7}$$

Καταλήγουμε λοιπόν στην

$$|y^n - z^n| \leq e^{2L(t^n - a)} |y_0 - z_0|, \quad n = 0, \dots, N, \tag{8}$$

και

$$\max_{0 \leq n \leq N} |y^n - z^n| \leq e^{2L(b-a)} |y_0 - z_0|, \tag{9}$$

δηλαδή η Έμμεση Euler είναι ευσταθής.

Σύγκλιση – Έμμεση Euler

Θεωρούμε την *Έμμεση Euler*

$$y^{n+1} = y^n + hf(t^{n+1}, y^{n+1}), \quad n = 0, \ldots, N-1, \tag{10}$$

Θα εκτιμήσουμε το σφάλμα

$$\varepsilon^n := y(t^n) - y^n, \quad n = 0, \ldots, N, \tag{11}$$

των προσεγγίσεων της Έμμεσης Euler.
Η απόδειξη στην περίπτωση όπου η f ικανοποιεί την ΟΣ-Lipschitz είναι παρόμοια με αυτήν της άμεσης Euler, με την διαφορά ότι στο ενδιάμεσο μέρος θα πρεπει να χρησιμοποιήσουμε την τεχνική της απόδειξης ευστάθειας της Έμμεσης Euler. Στην συνέχεια θα αποδείξουμε την σύγκλιση στην περίπτωση όπου η f ικανοποιεί την μονόπλευρη συνθήκη Lipschitz.

Σύγκλιση Έμμεσης Euler: η f ικανοποιεί την μονόπλευρη συνθήκη Lipschitz.

Όπως πριν έχουμε την εξίσωση σφάλματος

$$\varepsilon^{n+1} = \varepsilon^n + h\Big[f\big(t^{n+1}, y(t^{n+1})\big) - f(t^{n+1}, y^{n+1})\Big] + E^n.$$

Πολλαπλασιάζοντας με ε^{n+1} και χρησιμοποιώντας την μονόπλευρη συνθήκη Lipschitz, λαμβάνουμε,

$$(\varepsilon^{n+1})^2 \le \varepsilon^n \varepsilon^{n+1} + E^n \varepsilon^{n+1} \quad \text{ή} \quad |\varepsilon^{n+1}| \le |\varepsilon^n| + \max_{0\le m\le N} |E^m|,$$

από όπου προκύπτει ότι

$$|\varepsilon^n| \le n \max_{0\le m\le N} |E^m|.$$

Χρησιμοποιώντας την εκτίμηση συνέπειας της μεθόδου, 'έχουμε

$$\max_{0\le n\le N} |\varepsilon^n| \le \frac{b-a}{2} \max_{a\le t\le b} |y''(t)| h. \tag{12}$$

Είναι σημαντικό να παρατηρήσουμε ότι η σταθερά του σφάλματος είναι πολύ καλύτερη από την αντίστοιχη που προκύπτει αν η f ικανοποιεί την ΟΣ-συνθήκη Lipschitz. Σ' αυτήν την περίπτωση θα είχαμε

$$\max_{0\le n\le N} \left|\varepsilon^n\right| \le \frac{M}{L}\big(e^{L(b-a)} - 1\big)h, \quad M := \|y''\|_\infty = \max_{a\le t\le b} \left|y''(t)\right|. \tag{13}$$