

# Προβλήματα Αρχικών Τιμών

Έστω  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ ,  $f: [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μια συνάρτηση, και  $y_0 \in \mathbb{R}$ . Ένα τυπικό πρόβλημα αρχικών τιμών είναι: Αναζητείται  $y: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , τέτοια ώστε

$$\begin{aligned}y'(t) &= f(t, y(t)), & a \leq t \leq b, \\y(a) &= y_0.\end{aligned}\tag{1}$$

- ▶  $f$  συνεχής  $(t, y) \in [a, b] \times \mathbb{R}$ . ( $f \in C([a, b] \times \mathbb{R})$ .)
- ▶ Η συνάρτηση  $y$  ορισμένη στο  $[a, b]$ ,  $y \in C^1[a, b]$ , η οποία ικανοποιεί την (1) και την αρχική συνθήκη  $ay(a) = y_0$ , λέγεται λύση του ΠΑΤ (1).
- ▶ αν η  $f$  είναι  $m$  φορές συνεχώς παραγωγίσιμη στο  $[a, b] \times \mathbb{R}$ , τότε η λύση  $y$  είναι  $m + 1$  συνεχώς παραγωγίσιμη στο  $[a, b]$ .

# Γραμμικές Εξισώσεις

Όταν η  $f$  είναι πολυώνυμο βαθμού ένα ως προς την μεταβλητή  $y$ , η αντίστοιχη ΣΔΕ λέγεται *γραμμική* και το πρόβλημα (1) παίρνει την μορφή

$$\begin{aligned}y'(t) &= \lambda(t)y(t) + \mu(t), \quad a \leq t \leq b, \\y(a) &= y_0.\end{aligned}\tag{2}$$

► αν  $\lambda, \mu \in C[a, b]$ , τότε το (2) έχει μια μοναδική λύση  $y$ :

$$y(t) = e^{\int_a^t \lambda(s) ds} \left[ y_0 + \int_a^t \mu(s) e^{-\int_a^s \lambda(\tau) d\tau} ds \right], \quad a \leq t \leq b,\tag{3}$$

δηλαδή,

$$y(t) = e^{\int_a^t \lambda(s) ds} y_0 + \int_a^t \mu(s) e^{\int_s^t \lambda(\tau) d\tau} ds, \quad a \leq t \leq b.$$

# Ολοκληρωτικοί Παράγοντες

Όταν  $\lambda = 0$ , η εξίσωση λύνεται με απλή ολοκλήρωση.

► Διαφορετικά  $y'(s) - \lambda(s)y(s) = \mu(s)$  ή

$$\left( e^{-\int_a^s \lambda(\tau) d\tau} y(s) \right)' = e^{-\int_a^s \lambda(\tau) d\tau} \mu(s).$$

ολοκληρώνοντας από το  $a$  έως το  $t$ , παίρνουμε την (3).

## Γενικό $f$ , Παράδειγμα 1

$$\begin{aligned}y' &= y^2, \quad 0 \leq t \leq 2, \\y(0) &= 1.\end{aligned}\tag{4}$$

Υποθέτοντας ότι η  $y$  υπάρχει, βλέπουμε εύκολα ότι  $y(t) \geq 1$ . Αφού  $y'(t) \geq 0$ , προκύπτει ότι η  $y$  είναι αύξουσα και  $y(0) = 1$ . Επομένως η ΔΕ γίνεται

$$\frac{y'(t)}{(y(t))^2} = 1 \iff -\frac{d}{dt} \frac{1}{y(t)} = 1.$$

Ολοκληρώνοντας από το 0 έως το  $t$ , προκύπτει

$$-\frac{1}{y(t)} + \frac{1}{y(0)} = t \iff y(t) = \frac{1}{1-t}.$$

- ▶  $y(t) \rightarrow \infty$  όταν  $t \rightarrow 1^-$ .
- ▶ Συνεπώς, δεν υπάρχει λύση της (4) στο διάστημα  $[0, 2]$ .
- ▶ Σημειώστε ότι η  $f$  στην (4),  $f(t, y) = y^2$ , είναι όσο ομαλή μπορεί να γίνει. Συνεπώς η ομαλότητα της  $f$  δεν αρκεί για την ύπαρξη λύσεων του προβλήματος ΑΤ.

## Γενική $f$ , Παράδειγμα 2

Το ΠΑΤ

$$\begin{aligned}y' &= \sqrt{|y|}, & 0 \leq t \leq 1, \\y(0) &= 0,\end{aligned}\tag{5}$$

έχει άπειρες λύσεις:

$$y(t) := 0, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad \text{και} \quad y(t) := \begin{cases} 0 & , \quad 0 \leq t \leq t^*, \\ \frac{(t-t^*)^2}{4} & , \quad t^* < t \leq 1, \end{cases}$$

για κάθε  $t^* \in (0, 1)$ .

- ▶ Κάθε λύση  $y$  του ΠΑΤ (5) είναι αύξουσα συνάρτηση .
- ▶ Αν η  $y$  μηδενίζεται στο διάστημα  $[0, t^*]$  και δεν μηδενίζεται σε μια περιοχή στα δεξιά του  $t^*$ , είναι θετική στο  $(t^*, 1]$ .
- ▶ Συνεπώς μπορούμε να γράψουμε την ΣΔΕ στην μορφή

$$y'(t) = \sqrt{y(t)} \iff \frac{y'(t)}{\sqrt{y(t)}} = 1 \iff 2\left(\sqrt{y(t)}\right)' = 1.$$

- ▶ Σημειώστε ότι σ' αυτήν την περίπτωση η  $f, f(t, y) = \sqrt{|y|}$ , είναι συνεχής αλλά όχι παραγωγίσιμη (ούτε Lipschitz συνεχής) στο  $y = 0$ .

# Θεωρία Ύπαρξης και Μοναδικότητας

## Θεώρημα

Υποθέτουμε ότι η  $f: [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  είναι συνεχής και ικανοποιεί την συνθήκη Lipschitz ως προς  $y$ , ομοιόμορφα ως προς  $t$ , δηλαδή: Υπάρχει  $L \geq 0$  τώ

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L|y_1 - y_2| \quad \forall t \in [a, b] \quad \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}. \quad (6)$$

Τότε, για κάθε  $y_0 \in \mathbb{R}$ , το ΠΑΤ (1) έχει μια και μοναδική λύση. □

# Παρατηρήσεις

- ▶ Η συνθήκη (6) καλείται “ολική” συνθήκη Lipschitz, γιατί απαιτείται για όλα τα  $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$
- ▶ Η συνθήκη αυτή εξασφαλίζει μοναδικότητα σ' όλο το διάστημα  $[a, b]$ .
- ▶ Μπορούμε να αντικαταστήσουμε την (6) από μια τοπική συνθήκη Lipschitz, η οποία είναι πολύ πιο ρεαλιστική υπόθεση και μας εξασφαλίζει ύπαρξη και μοναδικότητα σε ένα κατ' αρχήν μικρότερο διάστημα  $[a, b']$ , όπου  $b'$ , ανήκει στο  $[a, b]$ .

# Τοπική ύπαρξη και μοναδικότητα λύσεων

## Θεώρημα

Έστω  $c > 0$  και  $f \in C([a, b] \times [y_0 - c, y_0 + c])$ . Αν η  $f$  ικανοποιεί την τοπική συνθήκη Lipschitz, ως προς  $y$ , στο  $[a, b] \times [y_0 - c, y_0 + c]$ , ομοιόμορφα ως προς  $t$ , δηλ.,

Υπάρχει  $L \geq 0$  τώ

$$\begin{aligned} &\text{για κάθε } t \in [a, b] \text{ και για κάθε } y_1, y_2 \in [y_0 - c, y_0 + c] \\ &|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|, \end{aligned} \tag{7}$$

τότε το ΠΑΤ (1) επιλύεται μονοσήμαντα σε ένα διάστημα  $[a, b']$ , όπου

$$b' := \min \left( b, a + \frac{c}{A} \right),$$

και

$$A := \max_{\substack{a \leq t \leq b \\ y_0 - c \leq y \leq y_0 + c}} |f(t, y)|. \quad \square$$