

Ευστάθεια

Υποθέτουμε ότι η f είναι συνεχής. Θα εστιάσουμε την προσοχή μας σε δύο περιπτώσεις

- ▶ η f ικανοποιεί την (ολική) συνθήκη Lipschitz
- ▶ η f ικανοποιεί την *μονομερή* συνθήκη Lipschitz (one sided Lipschitz condition).

Για $y_0, z_0 \in \mathbb{R}$, θεωρούμε τα ΠΑΤ

$$\begin{aligned} y' &= f(t, y), & a \leq t \leq b, & & \text{και} & & z' &= f(t, z), & a \leq t \leq b, \\ y(a) &= y_0, & & & & & z(a) &= z_0. \end{aligned} \tag{1}$$

- ▶ Ερώτηση: Υποθέτουμε ότι $y_0 \approx z_0$. Ισχύει ότι

$$y(t) \approx z(t), \quad \text{για κάθε } t?$$

Ευστάθεια: η f ικανοποιεί την (ολική) συνθήκη Lipschitz

- ▶ Εστω ότι η f ικανοποιεί την (ολική) συνθήκη Lipschitz

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L|y_1 - y_2| \quad \forall t \in [a, b] \quad \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

- ▶ τότε τα ΠΑΤ (1) έχουν μοναδικές λύσεις $y, z \in C^1[a, b]$,

Επιπλέον έστω,

- ▶ $\varepsilon(t) := y(t) - z(t)$ το σφάλμα (ή η απόσταση) των y και z
- ▶ Ερώτηση: Τι γνωρίζουμε για το $\varepsilon(t)$? Χρησιμοποιώντας τους ορισμούς

$$\varepsilon'(t) = f(t, y) - f(t, z), \quad \text{for } t \in [a, b].$$

Θα δείξουμε ότι

- ▶ a)

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \varepsilon^2(t) \leq L \varepsilon^2(t),$$

και

- ▶ b)

$$|\varepsilon(t)| \leq e^{L(t-a)} |\varepsilon(a)|, \quad a \leq t \leq b.$$

Ευστάθεια: η f ικανοποιεί την (ολική) συνθήκη Lipschitz – Απόδειξη της α)

- ▶ Για $\varepsilon(t) := y(t) - z(t)$ ξεκινούμε από την
- ▶ $\varepsilon'(t) = f(t, y) - f(t, z)$, για $t \in [a, b]$.
- ▶ Πολλαπλασιάζουμε τώρα με $\varepsilon(t)$ οπότε

$$\varepsilon(t)\varepsilon'(t) = (f(t, y) - f(t, z))\varepsilon(t),$$

Τώρα

- ▶ Αριστερό Μέλος:

$$\varepsilon(t)\varepsilon'(t) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \varepsilon^2(t),$$

- ▶ Δεξιό Μέλος:

$$(f(t, y) - f(t, z))\varepsilon(t) \leq |f(t, y) - f(t, z)| |\varepsilon(t)| \leq L\varepsilon^2(t)$$

Άρα

$$\varepsilon(t)\varepsilon'(t) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \varepsilon^2(t) \leq |f(t, y) - f(t, z)| |\varepsilon(t)| \leq L\varepsilon^2(t),$$

για κάθε $t \in [a, b]$.

Ευστάθεια: η f ικανοποιεί την (ολική) συνθήκη Lipschitz – Απόδειξη της b)

- ▶ Ξεκινάμε από την

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \varepsilon^2(t) \leq L \varepsilon^2(t),$$

- ▶ Θέτοντας $\varepsilon^2(t) =: \varphi(t)$ έχουμε

$$\varphi' - 2L\varphi \leq 0, \quad t \in [a, b]. \quad (3)$$

Πολλαπλασιάζουμε με τον ολοκληρωτικό παράγοντα e^{-2Lt} ,

$$e^{-2Lt} \varphi'(t) - 2Le^{-2Lt} \varphi(t) = \frac{d}{dt} \left(e^{-2Lt} \varphi(t) \right) \leq 0, \quad t \in [a, b].$$

Συνεπώς ο $e^{-2Lt} \varphi(t)$ φθίνει στο $[a, b]$. Άρα,

$$e^{-2Lt} \varphi(t) \leq e^{-2La} \varphi(a), \quad a \leq t \leq b,$$

δηλαδή,

$$|\varepsilon(t)| \leq e^{L(t-a)} |\varepsilon(a)|, \quad a \leq t \leq b, \quad (4)$$

και

$$\max_{a \leq t \leq b} |y(t) - z(t)| \leq e^{L(b-a)} |y_0 - z_0|. \quad (5)$$

Ευστάθεια: f Lipschitz: Παρατηρήσεις

- ▶ Η σταθερά $e^{L(b-a)}$ στο δεξιό μέλος στο παραπάνω φράγμα αυξάνει εκθετικά σε σχέση με την σταθερά Lipschitz L : Γεγονός που καλύπτει το χειρότερο δυνατό σενάριο για την συμπεριφορά του σφάλματος.
- ▶ Όταν το L είναι πολύ μεγάλο η παραπάνω εκτίμηση σφάλματος δεν δίδει αρκετά χρήσιμη πληροφορία για το εάν το $y(t) \approx z(t)$ αν το διάστημα $b - a$ δεν είναι πολύ μικρό .

Ευστάθεια: f dissipative

Υποθέτουμε τώρα ότι η f ικανοποιεί την σχέση

$$(f(t, y_1) - f(t, y_2))(y_1 - y_2) \leq 0, \quad t \in [a, b], \quad y_1, y_2 \in \mathbb{R}. \quad (6)$$

Η οποία καλείται μονόπλευρη συνθήκη Lipschitz (*one-sided Lipschitz condition*). Σημειώστε ότι αν $f_y(t, y) \leq 0$ τότε η (6) ισχύει.

- ▶ Η συνθήκη αυτή εμφανίζεται σε σημαντικές εφαρμογές. Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι οι παραβολικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους.

Ευστάθεια: f dissipative : εκτίμηση σφάλματος

Πολλαπλασιάζουμε την $\varepsilon'(t) = f(t, y) - f(t, z)$ με $\varepsilon(t)$,

$$\varepsilon(t)\varepsilon'(t) = (f(t, y) - f(t, z))\varepsilon(t),$$

συνεπώς, η (6) συνεπάγεται,

$$\varepsilon(t)\varepsilon'(t) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \varepsilon^2(t) \leq 0,$$

για κάθε $t \in [a, b]$. Άρα, η ε^2 είναι φθίνουσα συνάρτηση του t . Συνεπώς η $|\varepsilon|$ είναι επίσης φθίνουσα συνάρτηση και συμπεραίνουμε ότι

$$\max_{a \leq t \leq b} |y(t) - z(t)| \leq |y_0 - z_0|. \quad (7)$$

Ευστάθεια: f dissipative ένα απλό παράδειγμα

Αν η f είναι γραμμική ως προς y , $f(t, y) = \lambda(t)y + \mu(t)$, τότε προφανώς ικανοποιεί την συνθήκη (6), αν και μόνο αν η $\lambda(t)$ είναι ≤ 0

$$\begin{aligned}y' &= \lambda(t)y, \quad a \leq t \leq b, \quad \lambda \leq 0, \\y(a) &= y_0.\end{aligned}\tag{8}$$

- ▶ στην γενική (μη γραμμική) περίπτωση η ευστάθεια ελέγχεται παίρνοντας την διαφορά δυο λύσεων, στην γραμμική περίπτωση ΑΡΚΕΙ να μελετήσουμε την συμπεριφορά μιας λύσης της ομογενούς εξίσωσης. Αυτό επειδή:
- ▶ η διαφορά δυο λύσεων της (8) είναι λύση της ομογενούς εξίσωσης.
- ▶ Παρατηρούμε ότι το μ δεν επηρεάζει τις ιδιότητες ευστάθειας.
- ▶ Η εκτίμηση ευστάθειας (7) γίνεται

$$\max_{a \leq t \leq b} |y(t)| \leq |y_0|,\tag{9}$$

ή

$$\max_{a \leq t \leq b} |e(t)| \leq |e_0|,\tag{10}$$