3ο Εργαστήριο

Για την αριθμητική επίλυση ενός προβλήματος αρχικών τιμών (Π.Α.Τ.)

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad t \in [a, b], \quad y(0) = y_0$$

θεωρήσαμε μονοβηματικές μεθόδους όπως του Euler, αλλά και 2-βηματικές όπως η Adams Bashforth (2) και η μέθοδος του μέσου. Έστω ένας ομοιόμορφος διαμερισμός του $[a, b]$, στα σημεία $t_n = a + nh$, $n = 0, \ldots, N$, με βήμα $h = \dfrac{b-a}{N}$, υπολογίζουμε τις τιμές y_n που αποτελούν προσεγγίσεις στις τιμές $y(t_n)$, $n = 0, \ldots, N$

Άμεση Euler

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n), \quad n = 0, \ldots, N-1.$$

Μέθοδος του μέσου Για δοσμένα y_0, y_1,

$$y_{n+2} = y_n + 2hf(t_{n+1}, y_{n+1}), \quad n = 0, \ldots, N-2.$$

Μέθοδος Adams Bashforth(2) Για δοσμένα y_0, y_1,

$$y_{n+2} = y_{n+1} + h(\frac{3}{2}f(t_{n+1}, y_{n+1}) - \frac{1}{2}f(t_n, y_n)), \quad n = 0, \ldots, N-2.$$

Άσκηση 1: Έστω $y(t) = e^{0.25-(t-0.5)^2}$, στο $[0, 4]$ η οποία είναι λύση στο

$$y'(t) = (1-2t)y(t), \quad t \in [0, 4], \quad y(0) = 1.$$

Θεωρείστε τη μέθοδο του μέσου και τη μέθοδο Adams-Bashforth (2). Θεωρήστε ένα διαμερισμό του $[0, 4]$ σε $N+1$ σημεία, και για να υλοποιήσετε αυτές τις δύο μεθόδους χρησιμοποιήστε τις αρχικές τιμές $y_0 = 1$ και $y_1 = y(h) = e^{0.25-(h-0.5)^2}$. Για $N = 50$, κατασκευάστε τις προσεγγίσεις που δίνουν οι δύο μέθοδοι, δημιουργείστε τις γραφικές παράστασεις της προσεγγιστικής λύσης και της ακριβούς στο διάστημα [0,4]. Στη συνέχεια βρείτε το σφάλμα $\max_{0\leq n\leq N} |y_n - y(t_n)|$. Για $N = 100, 200, 300, 400, 500$ βρείτε τη πειραματική τάξη σύγκλισης για κάθε μια από τις δύο μεθόδους

Άσκηση 2: Επαναλάβετε την Άσκηση 1, αλλά τώρα η τιμή y_1 θα δίνεται χρησιμοποιώντας την άμεση μέθοδο του Euler, δηλαδή $y_1 = y_0 + hf(t_0, y_0)$. Αλλάζει η τάξη σύγκλισης;

Πεπλεγμένη Euler Μια πεπλεγμένη μονοβηματική μέθοδος είναι η **πεπλεγμένη Euler**

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_{n+1}, y_{n+1}), \quad n = 0, \ldots, N-1.$$

Για να υπολογίσουμε την τιμή y_{n+1} χρειάζεται να λύσουμε (στη γενική περίπτωση που η f είναι μη γραμμική ως προς y) μια μη γραμμική εξίσωση. Στην περίπτωση της άσκησης 1, η f είναι γραμμική ως προς y. Οπότε η πεπλεγμένη Euler παίρνει την ακόλουθη μορφή

$$y_{n+1} = y_n + h(1-2t_{n+1})y_{n+1}, \quad n = 0, \ldots, N-1.$$

Οπότε λύνοντας ως προς y_{n+1} παίρνουμε

$$(1 - h(1-2t_{n+1}))y_{n+1} = y_n \quad n = 0, \ldots, N-1$$

ή

$$y_{n+1} = y_n/(1 - h(1-2t_{n+1})) \quad n = 0, \ldots, N-1$$

Άσκηση 3: Για το ΠΑΤ της Άσκησης 1 θεωρείστε την πεπλεγμένη μέθοδο του Euler. Βρείτε το σφάλμα $\max_{0\le n\le N}|y_n - y(t_n)|$. Για $N = 100, 200, 300, 400, 500$ βρείτε τη πειραματική τάξη σύγκλισης για την πεπλεγμένη μεθόδο του Euler.

Άσκηση 4: Για το ΠΑΤ που έχετε θεωρήσει μέχρι τώρα φτιάξτε ένα πίνακα των σφαλμάτων της παρακάτω μορφής χρησιμοποιήστε ακρίβεια 4 δεκαδικών ψηφίων

N	Άμεση $Euler$	p	Πεπλεγμενη $Euler$	p	Μέθοδος Μέσου	p	$AB(2)$	p
100								
200								
300								
400								
500								

Ποιά μέθοδο θα προτιμήσετε;

Συστήματα Διαφορικών εξισώσεων

Θεωρούμε τώρα το ακόλουθο σύστημα διαφορικών εξισώσεων

$$x'(t) = \frac{5}{100}x(t)(1 - \frac{1}{100}y(t)), \quad y'(t) = \frac{1}{10}y(t)(\frac{5}{1000}x(t) - 2),$$

για $t \in [0, 150]$, $x(0) = 500$, $y(0) = 100$ Αυτό είναι ένα σύστημα που περιγράφει τη εξέλιξη του πλυθυσμού λαγών και αλεπούδων, όπου $x(t)$ είναι ο πλυθυσμός των λαγών και $y(t)$ των αλεπούδων.

Άσκηση 5: Θεωρείστε το παραπάνω σύστημα Δ.Ε. και μια διαμέριση του $[0, 150]$, με $N = 2500$ και εφαρμόστε τη άμεση μέθοδο του Euler, τη μέθοδο του μέσου και τη μέθοδο Adams-Bashforth(2) για συστήματα για να βρείτε τις προσεγγίσεις (x_n, y_n) των $(x(t_n), y(t_n))$, $n = 0, \dots, N$.

1. Δημιουργείστε τη γραφική παράσταση των λύσεων ως προς το χρόνο t.
2. Δημιουργείστε τη γραφική παράσταση των 2 προσεγγίσεων (x_n, y_n) στο πεδίο xy.
3. Ποιός είναι ο πλυθυσμός των λαγών και των αλεπούδων για χρόνο $t = 150$;
4. Αν μεταβάλετε τον αριθμό των σημείων N ο πλυθυσμός στο χρόνο $t = 150$ μεταβάλετε πολύ;
5. Ποιά μέθοδο πιστεύετε οτι δίνει καλυτερα αποτελέσματα;