Euler

Για την αριθμητική επίλυση ενός προβλήματος αρχικών τιμών (Π.Α.Τ.)

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad t \in [a, b], \quad y(0) = y_0$$

θεωρήσαμε τη μέθοδο του Euler. Έστω ένας ομοιόμορφος διαμερισμός του $[a, b]$, στα σημεία $t_n = a + nh, n = 0, \ldots, N$, με βήμα $h = \dfrac{b-a}{N}$, υπολογίζουμε τις τιμές y_n που αποτελούν προσεγγίσεις στις τιμές $y(t_n)$, $n = 0, \ldots, N$, όπου

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n), \quad n = 0, \ldots, N-1.$$

Άσκηση 1: Έστω $y(t) = e^{-t} + \sin(t)$, στο $[0, 10]$. Δημιουργείστε μια διαμέριση του $[0, 10]$ με 51 σημεία, t_n, $n = 0, 1, \ldots, 50$, και χρησιμοποιήστε τη βιβλιοθήκη matplotlib για να σχηματίσετε το γράφημα της $y(t)$.

Άσκηση 2: Έστω $y(t) = e^{-t} + \sin(t)$, στο $[0, 10]$, η οποία είναι λύση στο

$$y'(t) = -y(t) + \cos(t) + \sin(t), \quad t \in [0, 10], \quad y(0) = 1.$$

Ορίστε στη Python τη συνάρτηση 2 μεταβλητών $f(t, y) = -y + cos(t) + sin(t)$χρησιμοποιώντας τις συναρτήσεις sin και cos της Numpy

In [ ]:
```
def f(t,y):
    s=-y+np.cos(t)+np.sin(t)
    return s
```

1. Για βήμα $h = 0.5$ και αρχική τιμή $y_0 = 1$, υπολογίστε με τη μέθοδο του Euler την προσέγγιση y_{10}.
2. Για $N = 50$ κατασκευάστε τις προσεγγίσεις y_n, που δίνει η μέθοδος του Euler και δημιουργείστε τη γραφική παράσταση της προσεγγιστικής λύσης.

Άσκηση 3: Για το παραπάνω πρόβλημα αρχικών τιμών, υπολογίστε το σφάλμα ανάμεσα στην ακριβή λύση και την προσεγγιστική στο σημείο $t = 10$, $|y_N - y(10)|$, όταν $N = 50, 100, 200, 400$ Αν τα σφάλματα είναι αντίστοιχα err_1, err_2, err_3, err_4. Διαπιστώστε αν ο λόγος err_i/err_{i+1} είναι περίπου ο ίδιος για $i = 1, 2, 3$

Άσκηση 4: Στην προηγούμενη Άσκηση 3, θεωρούμε τώρα ως

$$err_i = \max_{0 \le n \le N} |y_n - y(t_n)|, \quad N = 50, 100, 200, 400,$$

και διαπιστώστε αν ο λόγος err_i/err_{i+1} είναι περίπου ο ίδιος για $i = 1, 2, 3$

Πειραματική εκτίμηση της τάξης σύγκλισης. Γνωρίζουμε ότι για τη μέθοδο Euler το σφάλμα της μεθόδου ικανοποιεί

$$\max_{0\leq n\leq N} |y_n - y(t_n)| \leq Ch^p$$

με $p = 1$.

Υπολογίζοντας το σφάλμα

$$err_N = \max_{0\leq n\leq N} |y_n - y(t_n)|$$

για δύο διαφορετικές διαμερίσεις με $N_1 < N_2$, η πειραματική τάξη σύγκλισης ορίζεται ως

$$p = \frac{\ln(\frac{err_{N_2}}{err_{N_1}})}{\ln(\frac{N_1}{N_2})}$$

Άσκηση 5: Χρησιμοποιείστε τα αποτελέσματα της Άσκησης 4 για να βρείτε ότι πειραματικά η τάξη σύγκλισης της μεθόδου του Euler είναι $p \approx 1$

In [ ]:
```

```