4ο Εργαστήριο

Για την αριθμητική επίλυση ενός προβλήματος αρχικών τιμών (Π.Α.Τ.)

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad t \in [a, b], \quad y(0) = y_0$$

θεωρήσαμε πεπλεγμένες μονοβηματικές μεθόδους όπως του Euler και του τραπεζίου, αλλά και 2-βηματικές όπως η Adams Moulton (2) και η BDF2. Έστω ένας ομοιόμορφος διαμερισμός του $[a, b]$, στα σημεία $t_n = a + nh, n = 0, \ldots, N$, με βήμα $h = \dfrac{b-a}{N}$, υπολογίζουμε τις τιμές y_n που αποτελούν προσεγγίσεις στις τιμές $y(t_n), n = 0, \ldots, N$

Πεπλεγμένη Euler

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_{n+1}, y_{n+1}), \quad n = 0, \ldots, N-1.$$

Μέθοδος του τραπεζίου

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f(t_{n+1}, y_{n+1}) + f(t_n, y_n)), \quad n = 0, \ldots, N-1.$$

Μέθοδος BDF(2) Για δοσμένα y_0, y_1,

$$y_{n+2} - \frac{4}{3}y_{n+1} + \frac{1}{3}y_n = \frac{2}{3}hf(t_{n+2}, y_{n+2}), \quad n = 0, \ldots, N-2.$$

Στην περίπτωση που η συνάρτηση f είναι γραμμική ως προς y, π.χ. $f(t, y) = g(t)y$, τότε οι παραπάνω μέθοδοι υλοποιούνται εύκολα, π.χ. **Πεπλεγμένη Euler**

$$y_{n+1} = \frac{1}{1 - hg(t_{n+1})}y_n, \quad n = 0, \ldots, N-1.$$

η **Μέθοδος του τραπεζίου**

$$y_{n+1} = \frac{1 + h\dfrac{g(t_n)}{2}}{1 - h\dfrac{g(t_{n+1})}{2}}y_n, \quad n = 0, \ldots, N-1.$$

και η **Μέθοδος BDF(2)** για δοσμένα y_0, y_1,

$$y_{n+2} = \frac{\dfrac{4}{3}y_{n+1} - \dfrac{1}{3}y_n}{1 - \dfrac{2}{3}hg(t_{n+2})}, \quad n = 0, \ldots, N-1.$$

Άσκηση 1: Έστω $y(t) = e^{0.25-(t-0.5)^2}$, στο $[0,4]$ η οποία είναι λύση στο

$$y'(t) = (1-2t)y(t), \quad t \in [0,4], \quad y(0) = 1.$$

Θεωρείστε την πεπλεγμένη μέθοδο του Euler, τη μέθοδο τραπεζίου και τη μέθοδο BDF(2). Θεωρήστε ένα διαμερισμό του $[0,4]$ σε $N+1$ σημεία, και για να υλοποιήσετε τη μέθοδο BDF χρησιμοποιήστε τις αρχικές τιμές $y_0 = 1$ και $y_1 = y_0 + hf(t_0, y_0)$, δηλαδή για τη y_1 χρησιμοποιήστε την άμεση μέθοδο του Euler. Για $N = 50$, κατασκευάστε τις προσεγγίσεις που δίνουν οι δύο μέθοδοι, δημιουργείστε τις γραφικές παράστασεις της προσεγγιστικής λύσης και της ακριβούς στο διάστημα $[0,4]$. Στη συνέχεια βρείτε το σφάλμα $\max_{0\leq n\leq N} |y_n - y(t_n)|$. Για $N = 100, 200, 300, 400, 500$ βρείτε τη πειραματική τάξη σύγκλισης για κάθε μια από τις δύο μεθόδους

Μη γραμμική f ως προς y

Σε αυτή την περίπτωση πρέπει να λύσουμε τη λύση μιας μη γραμμικής εξίσωσης. Μια μέθοδος είναι π.χ. η μέθοδος του σταθερού σημείου.

Για να βρούμε τη λύση της εξίσωσης $x = g(x)$, για x_0 δοσμένο δημιουργούμε την ακολουθία x_{n+1}

$$x_{n+1} = g(x_n), n = 0, \ldots$$

Για κριτήριο τερματισμού του αλγορίθμου μπορουμε να θέσουμε π.χ. αν η διαφορά δυο συνεχόμενων προσεγγίσεων γίνει μικρότερη από έναν προκαθορισμένο αριθμό tol. Ετσι τερματίζουμε την επαναλαληπτική διαδικασια και δεχομαστε ως προσέγγιση της $x^\star$ to x_n όταν $|x_n - x_{n-1}| \leq tol$.

Άσκηση 2: Έστω $g(t) = \cos(t)$, στο $[0,1]$. Θέλουμε να βρούμε το σημείο $x^\star \in [0,1]$ τέτοιο ώστε

$$x^\star = \cos(x^\star).$$

Φτιάξτε μια επαναληπτική διαδικασία ώστε να προσεγγίσετε το $x^\star$, ξεκινώντας από $x_0 = 1$. Για κριτήριο τερματισμού, θέσετε μέγιστο αριθμό επαναλήψεων 500 και $tol = 10^{-8}$.

Πεπλεγμένη Euler Μια πεπλεγμένη μονοβηματική μέθοδος είναι η **πεπλεγμένη Euler**

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_{n+1}, y_{n+1}), \quad n = 0, \ldots, N-1.$$

Για να υπολογίσουμε την τιμή y_{n+1} χρειάζεται να λύσουμε (στη γενική περίπτωση που η f είναι μη γραμμική ως προς y) μια μη γραμμική εξίσωση. Ένας τρόπος είναι χρησιμοποιήσουμε μια επαναληπτική διαδικασία όπως στον υπολογισμό του σταθερού σημείου. Έτσι, σε κάθε βήμα του αλγορίθμου της πεπλεγμένης Euler, για τον υπολογισμό δηλαδή του y_{n+1} θέτουμε

$$g(s) = y_n + hf(t_{n+1}, s),$$

και αναζητούμε $s^\star$ τέτοιο ώστε

$$s^\star = g(s^\star).$$

Επειδή μπορούμε μόνο να προσεγγίσουμε το $s^\star$, την προσέγγιση s_n που θα υπολογίσουμε χρησιμοποιώντας την επαναληπτική διαδικασία του σταθερού σημείου, θα θέσουμε ως y_{n+1}, δηλαδή θεωρούμε την ακολουθία

$$s_{k+1} = g(s_k), k = 0, \ldots,$$

για δοσμένο tol, υπολογίζουμε το s_k τέτοιο ώστε $|s_k - s_{k-1}| \leq tol$ και θέτουμε

$$y_{n+1} = s_k$$

και προχωράμε για την επόμενη προσέγγιση της μεθόδου πεπεπλεγμένης Euler.

Άσκηση 3: θεωρείστε την πεπλεγμένη μέθοδο του Euler για τον υπολογισμό της λύσης του προβλήματος

$$y'(t) = \frac{1}{1+t^2} - 2(y(t))^2, \quad t \in [0,1], \quad y(0) = 0.$$

Η ακριβή λύση του προβλήματος είναι $y(t) = \dfrac{t}{1+t^2}$. Βρείτε το σφάλμα $\max_{0\le n\le N} |y_n - y(t_n)|$. Για $N = 100, 200, 300, 400, 500$ βρείτε τη πειραματική τάξη σύγκλισης για την πεπλεγμένη μεθόδο του Euler.

Άσκηση 4: Επαναλάβετε το πρόβλημα για τη μέθοδο του τραπεζίου και τη BDF(2)