5ο Εργαστήριο

Για την αριθμητική επίλυση ενός προβλήματος αρχικών τιμών (Π.Α.Τ.)

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad t \in [a, b], \quad y(0) = y_0$$

θεωρήσαμε πεπλεγμένες μονοβηματικές μεθόδους όπως του Euler και του τραπεζίου, αλλά και 2-βηματικές όπως η Adams Moulton (2) και η BDF2. Έστω ένας ομοιόμορφος διαμερισμός του $[a, b]$, στα σημεία $t_n = a + nh$, $n = 0, \ldots, N$, με βήμα $h = \dfrac{b-a}{N}$, υπολογίζουμε τις τιμές y_n που αποτελούν προσεγγίσεις στις τιμές $y(t_n)$, $n = 0, \ldots, N$

Πεπλεγμένη Euler

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_{n+1}, y_{n+1}), \quad n = 0, \ldots, N-1.$$

Μέθοδος του τραπεζίου

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f(t_{n+1}, y_{n+1}) + f(t_n, y_n)), \quad n = 0, \ldots, N-1.$$

Μέθοδος BDF(2) Για δοσμένα y_0, y_1,

$$y_{n+2} - \frac{4}{3}y_{n+1} + \frac{1}{3}y_n = \frac{2}{3}hf(t_{n+2}, y_{n+2}), \quad n = 0, \ldots, N-2.$$

Μη γραμμική f ως προς y

Αν η συνάρτηση f είναι μη γραμμική ως προς y, π.χ. $f(t, y) = \dfrac{1}{1+t^2} - 2(y)^2$, τότε για να εφαρμόσουμε μια πεπλεγμένη μεθόδο, πρέπει να λύσουμε μια μη γραμμικής εξίσωσης χρησιμοποιώντας π.χ. τη μέθοδος του σταθερού σημείου (το είδαμε στο προηγούμενο εργαστήριο).

Μέθοδοι Πρόβλεψης - Διόρθωσης

Ένας άλλος τρόπος είναι θεωρήσουμε μια άλλη άμεση μέθοδο για να τη χρησιμοποιήσουμε ως μέθοδο πρόβλεψης της λύσης. Π.χ. το ζευγάρι Άμεση Euler - Πεπλεγμένη Euler, σε αυτή τη περίπτωση η μέθοδος παίρνει τη μορφή:

Άμεση Euler - Πεπλεγμένη Euler

$$\begin{aligned} &(\text{Πρόβλεψη}) \qquad \widetilde{y}_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n) \\ &(\text{Διόρθωση}) \qquad y_{n+1} = y_n + hf(t_{n+1}, \widetilde{y}_{n+1}) \end{aligned}$$

Ένα άλλο ζευγάρι που μπορούμε να θεωρήσουμε είναι το Άμεση Euler - Μέθοδος Τραπεζίου

Άμεση Euler - Μέθοδος Τραπεζίου

$$\begin{aligned} &(\text{Πρόβλεψη}) \qquad \widetilde{y}_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n) \\ &(\text{Διόρθωση}) \qquad y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\big(f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, \widetilde{y}_{n+1})\big) \end{aligned}$$

Ένα άλλο ζευγάρι που μπορούμε να θεωρήσουμε είναι το Άμεση Euler - Μέθοδος BDF(2)

Άμεση Euler - Μέθοδος BDF(2)

$$(\text{Πρόβλεψη}) \qquad \widetilde{y}_{n+2} = y_{n+1} + hf(t_{n+1}, y_{n+1})$$
$$(\text{Διόρθωση}) \qquad y_{n+2} = \frac{4}{3}y_{n+1} - \frac{1}{3}y_n + \frac{2}{3}hf(t_{n+2}, \widetilde{y}_{n+2})$$

Άσκηση 1: θεωρείστε τη μέθοδο πρόβλεψης-διόρθωσης (Άμεση Euler-Πεπλεγμένη Euler) για τον υπολογισμό της λύσης του προβλήματος

$$y'(t) = \frac{1}{1+t^2} - 2(y(t))^2, \quad t \in [0,1], \quad y(0) = 0.$$

Η ακριβή λύση του προβλήματος είναι $y(t) = \dfrac{t}{1+t^2}$.

Βρείτε το σφάλμα $\max_{0\leq n\leq N} |y_n - y(t_n)|$. Για $N = 100, 200, 300, 400, 500$ βρείτε τη πειραματική τάξη σύγκλισης για τη μεθόδο πρόβλεψης-διόρθωσης.

Άσκηση 2: Επαναλάβετε την παραπάνω άσκηση για τις μεθόδους Πρόβλεψης - Διόρθωσης, Άμεση Euler - Μέθοδος Τραπεζίου και Άμεση Euler - Μέθοδος BDF(2).

Μέθοδοι Runge Kutta

Μια άλλη κατηγορία μεθόδων είναι οι μέθοδοι Runge--Kutta. Αυτές είναι μονοβηματικές μέθοδοι συνήθως υψηλής τάξης. Βασίζονται στην κατασκευή προσεγγίσεων σε χρονικά σημεία ανάμεσα στο t_n και t_{n+1}. Αυτές οι ενδιάμεσες τιμές χρησιμοποιούνται μόνο για την προσέγγιση της προσέγγισης στο χρονικό σημείο t_{n+1}.

Ένα παράδειγμα δίνεται από το ακόλουθο μητρώο:

$$\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \hline \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \end{array}$$

Το παραπάνω μητρώο περιγράφει την ακόλουθη μέθοδο:

$$y_{n,1} = y_n$$
$$y_{n,2} = y_n + \frac{h}{2}f(t_n, y_n)$$
$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f(t_n, y_n) + f(t_n + \frac{h}{2}, y_{n,2})$$

Άσκηση 3: Επαναλάβετε την Άσκηση 1 για την παραπάνω μεθόδο Runge-Kutta.

Άσκηση 4: Επαναλάβετε την Άσκηση 1 για τις μεθόδους Runge-Kutta με τα παρακάτω μητρώα

A. $$\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \hline \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \end{array}$$

B. $$\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \hline \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & \end{array}$$