6ο Εργαστήριο - Συστήματα Δ.Ε.

Για την αριθμητική επίλυση ενός προβλήματος αρχικών τιμών (Π.Α.Τ.)

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad t \in [a, b], \quad y(0) = y_0$$

θεωρήσαμε άμεσες και πεπλεγμένες μεθόδους όπως του Euler και του τραπεζίου, του μέσου, Adams Moulton (2), η BDF2 και άλλες.

Αν οι συνάρτησεις y και f είναι διανυσματικές. Είδαμε ορισμένα παραδείγματα, όπως η εξέλιξη πλυθυσμών (π.χ. θήραμα-κυνηγός).

Αν η Δ.Ε. είναι 2ης τάξεως π.χ.

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = f(t),$$

τότε μπορούμε να βρούμε τη λύση της χρησιμοποιώντας μεθόδους που μελετήσαμε για πρώτης τάξεως διαφορικές εξισώσεις.

Δευτερης τάξεως Δ.Ε.

Η κίνηση ενός εκρεμμούς με βάρος m που κρέμεται από μια ράβδο μήκους l, περιγράφεται από την παρακάτω Δ.Ε., όπου $\theta \in (0, \pi/2)$ συμβολίζουμε τη γωνία που σχηματίζει η ράβδος με την κάθετο από το σημείο στήριξης,

$$ml \frac{d^2 \theta(t)}{dt} = -mg \sin(\theta(t)),$$

και g η επιτάχυνση της βαρύτητας.

Για να λύσουμε αυτό το πρόβλημα μοναδικά χρειαζόμαστε την αρχική μετατόπιση $\theta(0)$ και την αρχική ταχύτητα $\theta'(0)$. Αν θεωρήσουμε ότι

$$x(t) = \theta(t) \text{ και } y(t) = \theta'(t)$$

τότε οδηγούμαστε στο σύστημα

$$\begin{aligned} x'(t) &= y(t) \\ y'(t) &= -\frac{g}{l} \sin(x(t)), \end{aligned}$$

και $x(0) = \theta(0)$, $y(0) = \theta'(0)$

Άσκηση 1: θεωρήστε την άμεση μέθοδο του Euler για τη λύση του παραπάνω προβλήματος. Θεωρήστε ότι το εκρεμές έχει μήκος $l = 1$, η επιταχυνση της βαρύτητας είναι $g = 10$, αρχικά έχει μετατοπιστεί κατά 10 μοίρες και το αφήνουμε (η αρχική ταχύτητα είναι 0). Βρείτε τη μετατόπιση του από τον κάθετο άξονα για $t = 4$ αν θεωρείστε έναν διαμερισμό με $N = 100$. Δημιουργήστε το γράφημα της προσεγγιστικής λύσης $\theta(t)$. Επανέρχεται το σώμα στην αρχική θέση για $t = 4$; Ποιά είναι η διαφορά $|\theta(0) - \theta(4)|$. Επαναλάβετε για διαμερισμους με $N = 200, 400, 600$. Η 1 μοίρα είναι ίση με $\frac{\pi}{180}$.

Άσκηση 2: Επαναλάβετε την άσκηση 1 για τη μέθοδο του μέσου,

Μέθοδος Μέσου

$$y_{n+2} = y_n + 2hf(t_{n+1}, y_{n+1})$$

και για πρώτη προσέγγιση χρησιμοποιήστε την άμεση μέθοδο του Euler.

Άσκηση 3: Επαναλάβετε την άσκηση 1 για τη μέθοδο πρόβλεψης-διόρθωσης, Euler-Τραπεζίου.

Άμεση Euler - Μέθοδος Τραπεζίου

$$\begin{aligned} &(\text{Πρόβλεψη}) \qquad \widetilde{y}_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n) \\ &(\text{Διόρθωση}) \qquad y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\big(f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, \widetilde{y}_{n+1})\big) \end{aligned}$$

Άσκηση 4: Επαναλάβετε την άσκηση 1 για τη μέθοδο Runge-Kutta

$$\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \hline \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \end{array}$$

In [ ]:

Αν η κίνηση του εκρεμούς διαφοροποιηθεί ως εξης: $\theta(0)$ γίνει 60 μοίρες, τότε θα επιστρέψει στην αρχική θέση σε κάποιο άλλο χρόνο, αλλά η μέγιστη γωνία δεν θα είναι μεγαλύτερη από την αρχική των 60 μοιρών.

Στο διάνυσμα της προσεγγιστικής λύσης της θ βρείτε τη μέγιστη τιμή και συγκρίνετε την με την αρχική τιμή της γωνίας $\theta(0)$.

Άσκηση 5: Επαναλάβετε την άσκηση 1 για τις παραπάνω μεθόδους με $\theta(0)$ τώρα 60 μοίρες, και βρείτε τη διαφορά ανάμεσα στη μέγιστη τιμή της προσεγγιστικής λύσης και της αρχικής τιμής $\theta(0)$, για $\mathrm{N} = 100, 200, 400, 600$.