Προβλήματα Αρχικών Τιμών

Έστω $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση, και $y_0 \in \mathbb{R}$. Ένα τυπικό *πρόβλημα αρχικών τιμών* είναι: Αναζητείται $y : [a, b] \to \mathbb{R}$, τέτοια ώστε

$$\begin{aligned} y'(t) &= f\big(t, y(t)\big), \quad a \le t \le b, \\ y(a) &= y_0. \end{aligned} \tag{1}$$

- f συνεχής $(t, y) \in [a, b] \times \mathbb{R}$. ($f \in C([a, b] \times \mathbb{R})$.)
- Η συνάρτηση y ορισμένη στο $[a, b]$, $y \in C^1[a, b]$, η οποία ικανοποιεί την (1) και την αρχική συνθήκη a$y(a) = y_0$, λέγεται *λύση* του ΠΑΤ (1).
- αν η f είναι m φορές συνεχώς παραγωγίσιμη στο $[a, b] \times \mathbb{R}$, τότε η λύση y είναι $m + 1$ συνεχώς παραγωγίσιμη στο $[a, b]$.

Χρόνος / Διακριτά χρονικά βήματα

Σκεφτόμαστε την μεταβλητή t ως χρόνο.
Οι αριθμητικοί αλγόριθμοι υπολογίζουν προσεγγίσεις σε *διακριτές χρονικές στιγμές:*

- Έστω
$$a = t^0 < t^1 < \cdots < t^N = b$$
μια διάμεριση του $[a, b]$.
- Θεωρούμε τους διακριτούς χρόνους t^n.
- Αναζητούμε προσεγγίσεις του y στους διακριτούς χρόνους t^n:
$$y(t^i), \quad i = 0, \ldots, N.$$
- Συμβολισμός: Θα λέμε
y^i την προσέγγιση του y η οποία προκύπτει από τον αριθμητικό μας αλγόρ
- Ή
$$y^i \approx y(t^i), \quad i = 0, \ldots, N.$$

Βοηθητικό αποτέλεσμα ευστάθειας

Πρόταση

(*Ευστάθεια πολυβηματικών μεθόδων. Butcher*) *Έστω ότι η $k-$ βηματική μέθοδος* (**??**) *πληροί τη συνθήκη των ριζών. Έστω $\lambda^n, n = 0, \dots, N-k$, δεδομένες σταθερές, και έστω $\beta_i^n, i = 0, \dots, k,\ n = 0, \dots, N-k$, δεδομένοι αριθμοί με $|\beta_i^n| \leqslant B < \infty$. Για $h = \frac{b-a}{N}$ θεωρούμε την εξίσωση διαφορών*

$$\begin{aligned} \alpha_k \psi^{n+k} + \alpha_{k-1}\psi^{n+k-1} + \cdots + \alpha_0 \psi^n = &h\big(\beta_k^n \psi^{n+k} + \cdots + \beta_0^n \psi^n\big) \\ &+ \lambda^n, \quad 0 \leqslant n \leqslant N-k. \end{aligned} \tag{2}$$

Τότε υπάρχει $h_0 > 0$ τέτοιο ώστε για $h \leqslant h_0$ να ισχύει

$$\max_{0\leqslant n\leqslant N} |\psi^n| \leqslant C\Big[N \max_{0\leqslant n\leqslant N-k} |\lambda^n| + \max_{0\leqslant j\leqslant k-1} |\psi^j|\Big], \tag{3}$$

όπου η σταθερά C εξαρτάται από τα $b-a$, h_0, B, αλλά είναι ανεξάρτητη των h, λ^n, ψ^n, N και β_i^n.

Σύγκλιση

Θεώρημα

Υποθέτουμε ότι η ΟΣ-Lipschitz ικανοποιείται και το ΠΑΤ έχει μια αρκετά ομαλή λύση $y \in C^{p+1}[a, b]$. Έστω ότι η $k-$βηματική μέθοδος είναι ευσταθής και έχει τάξη ακρίβειας $p \geqslant 1$. Τότε, υπάρχει $h_0 > 0$, τέτοιο ώστε, για $0 < h \leqslant h_0$, να ισχύει

$$\max_{0 \leqslant n \leqslant N} |y(t^n) - y^n| \leqslant C\Big[\max_{0 \leqslant j \leqslant k-1} |y(t^j) - y^j| + h^p \max_{a \leqslant t \leqslant b} |y^{p+1}(t)|\Big] \qquad (4)$$

με μια σταθερά C ανεξάρτητη των h, N, y.

Σύγκλιση II

Απόδειξη. Έστω

$$\rho^n := \sum_{j=0}^{k} \big[\alpha_j y(t^n + jh) - h\beta_j y'(t^n + jh)\big], \quad n = 0, \dots, N-k.$$

Επειδή, σύμφωνα με την υπόθεσή μας, η τάξη ακρίβειας της μεθόδου είναι p, έχουμε

$$\max_{0\leqslant n\leqslant N-k} |\rho^n| \leqslant C' h^{p+1} \|y^{(p+1)}\|_\infty, \tag{5}$$

με μια σταθερά C' ανεξάρτητη των h, y, όπως διαπιστώνει κανείς εύκολα αναπτύσσοντας κατά Taylor. Με $\varepsilon^n := y(t^n) - y^n, n = 0, \dots, N$, έχουμε

$$\begin{aligned}
&\alpha_k\varepsilon^{n+k} + \alpha_{k-1}\varepsilon^{n+k-1} + \cdots + \alpha_0\varepsilon^n = \\
&= \big[\alpha_k y(t^{n+k}) + \cdots + \alpha_0 y(t^n)\big] - \big(\alpha_k y^{n+k} + \cdots + \alpha_0 y^n\big) \\
&= h\big[\beta_k y'(t^{n+k}) + \cdots + \beta_0 y'(t^n)\big] - h\big(\beta_k f^{n+k} + \cdots + \beta_0 f^n\big) + \rho^n \\
&= h\Big[\beta_k\big[f\big(t^{n+k}, y(t^{n+k})\big) - f^{n+k}\big] + \cdots + \beta_0\big[f\big(t^n, y(t^n)\big) - f^n\big]\Big] + \rho^n.
\end{aligned}$$

Σύγκλιση III

Θέτουμε τώρα, για $m = 0, \dots, N$,

$$g^m := \begin{cases} \frac{f\left(t^m, y(t^m)\right) - f^m}{\varepsilon^m}, & \text{αν} \quad \varepsilon^m \neq 0, \\ 0 \qquad\qquad\qquad , & \text{αν} \quad \varepsilon^m = 0, \end{cases}$$

και η παραπάνω σχέση γράφεται στη μορφή

$$\alpha_k \varepsilon^{n+k} + \cdots + \alpha_0 \varepsilon^n = h\left(\beta_k g^{n+k} \varepsilon^{n+k} + \cdots + \beta_0 g^n \varepsilon^n\right) + \rho^n, \tag{6}$$

για $n = 0, \dots, N - k$. Τώρα ισχύει προφανώς

$$|g^n| \leqslant L, \quad n = 0, \dots, N,$$

όπου L η σταθερά Lipschitz της f ως προς τη δεύτερη μεταβλητή.

Σύγκλιση IV

Με

$$\beta_i^n := \beta_i g^{n+i}, \quad i = 0, \dots, k, \quad n = 0, \dots, N-k,$$

ισχύει συνεπώς

$$\max_{i,n} |\beta_i^n| \leqslant L \max_i |\beta_i| =: B < \infty. \tag{7}$$

Η (6) γράφεται τώρα ως

$$\alpha_k \varepsilon^{n+k} + \cdots + \alpha_0 \varepsilon^n = h\big(\beta_k^n \varepsilon^{n+k} + \cdots + \beta_0^n \varepsilon^n\big) + \rho^n, \quad n = 0, \dots, N-k,$$

Άρα, (βλ. Πρόταση παραπάνω και Πρόταση 4.1, Βιβλίου Ακρίβη-Δουγαλή)

$$\max_{0 \leqslant n \leqslant N} |\varepsilon^n| \leqslant C\Big[N \max_{0 \leqslant n \leqslant N-k} |\rho^n| + \max_{0 \leqslant j \leqslant k-1} |\varepsilon^j|\Big].$$

Χρησιμοποιώντας στην τελευταία ανισότητα την (5) και το γεγονός ότι $Nh = b - a$ καταλήγουμε στην (4).