

5ο Εργαστήριο

Για την αριθμητική επίλυση ενός προβλήματος αρχικών τιμών (Π.Α.Τ.)

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad t \in [a, b], \quad y(0) = y_0$$

θεωρήσαμε μονοβηματικές μεθόδους όπως του Euler, αλλά και άμεσες 2-βηματικές όπως η Adams Bashforth (2) και η μέθοδος του μέσου. Έστω ένας ομοιόμορφος διαμερισμός του $[a, b]$, στα σημεία

$$t_n = a + nh, \quad n = 0, \dots, N, \quad \text{με βήμα } h = \frac{b - a}{N}, \quad \text{υπολογίζουμε τις τιμές } y_n \text{ που αποτελούν}$$

προσεγγίσεις στις τιμές $y(t_n)$, $n = 0, \dots, N$, τότε θεωρούμε τις μεθόδους

Άμεση Euler

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n), \quad n = 0, \dots, N - 1.$$

Μέθοδος του μέσου Για δοσμένα y_0, y_1 ,

$$y_{n+2} = y_n + 2hf(t_{n+1}, y_{n+1}), \quad n = 0, \dots, N - 2.$$

και τη

Μέθοδος Adams Bashforth(2) Για δοσμένα y_0, y_1 ,

$$y_{n+2} = y_{n+1} + h\left(\frac{3}{2}f(t_{n+1}, y_{n+1}) - \frac{1}{2}f(t_n, y_n)\right), \quad n = 0, \dots, N - 2.$$

Άσκηση 1: Έστω $y(t) = e^{0.25-(t-0.5)^2}$, στο $[0, 4]$ η οποία είναι λύση στο

$$y'(t) = (1 - 2t)y(t), \quad t \in [0, 4], \quad y(0) = 1.$$

Θεωρείστε τη μέθοδο του μέσου και τη μέθοδο Adams-Bashforth (2). Θεωρήστε ένα διαμερισμό του $[0, 4]$ σε $N + 1$ σημεία, και για να υλοποιήσετε αυτές τις δύο μεθόδους χρησιμοποιήστε τις αρχικές τιμές $y_0 = 1$ και $y_1 = y(h) = e^{0.25-(h-0.5)^2}$. Για $N = 50$, κατασκευάστε τις προσεγγίσεις που δίνουν οι δύο μέθοδοι, δημιουργήστε τις γραφικές παράστασεις της προσεγγιστικής λύσης και της ακριβούς στο διάστημα $[0, 4]$. Στη συνέχεια βρείτε το σφάλμα $\max_{0 \leq n \leq N} |y_n - y(t_n)|$. Για $N = 100, 200, 300, 400, 500$ βρείτε τη πειραματική τάξη σύγκλισης για κάθε μια από τις δύο μεθόδους

Άσκηση 2: Επαναλάβετε την Άσκηση 1, αλλά τώρα η τιμή y_1 θα δίνεται χρησιμοποιώντας την άμεση μέθοδο του Euler, δηλαδή $y_1 = y_0 + hf(t_0, y_0)$. Αλλάζει η τάξη σύγκλισης;

Άσκηση 3: Για το ΠΑΤ που έχετε θεωρήσει μέχρι τώρα φτιάξτε ένα πίνακα των σφαλμάτων της παρακάτω μορφής χρησιμοποιήστε ακρίβεια 4 δεκαδικών ψηφίων, η y_1 θα δίνεται χρησιμοποιώντας την άμεση μέθοδο του Euler,

N	Άμεση Euler	p	Μέθοδος Μέσου	p	AB(2)	p
100						
200						
300						
400						
500						

Ποιά μέθοδο θα προτιμήσετε;

Πεπλεγμένες πολυβηματικές μέθοδοι Μια πεπλεγμένη μονοβηματική μέθοδος είναι η **πεπλεγμένη Euler**

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_{n+1}, y_{n+1}), \quad n = 0, \dots, N - 1.$$

Για να υπολογίσουμε την τιμή y_{n+1} χρειάζεται να λύσουμε (στη γενική περίπτωση που η f είναι μη γραμμική ως προς y) μια μη γραμμική εξίσωση. Στην περίπτωση της άσκησης 1, η f είναι γραμμική ως προς y . Οπότε η πεπλεγμένη Euler παίρνει την ακόλουθη μορφή

$$y_{n+1} = y_n + h(1 - 2t_{n+1})y_{n+1}, \quad n = 0, \dots, N - 1.$$

Οπότε λύνοντας ως προς y_{n+1} παίρνουμε

$$(1 - h(1 - 2t_{n+1}))y_{n+1} = y_n \quad n = 0, \dots, N - 1$$

ή

$$y_{n+1} = \frac{1}{1 - h(1 - 2t_{n+1})} y_n, \quad n = 0, \dots, N - 1.$$

Μια πεπλεγμένη διβηματική μέθοδος είναι η μέθοδος του Simpson

Μέθοδος του Simpson Για δοσμένα y_0, y_1 ,

$$y_{n+2} = y_n + \frac{h}{3}(f(t_{n+2}, y_{n+2}) + 4f(t_{n+1}, y_{n+1}) + f(t_n, y_n)), \quad n = 0, \dots, N - 2.$$

Για να υπολογίσουμε την τιμή y_{n+1} χρειάζεται να λύσουμε (στη γενική περίπτωση που η f είναι μη γραμμική ως προς y) μια μη γραμμική εξίσωση. Στην περίπτωση της άσκησης 1, η f είναι γραμμική ως προς y . Οπότε η πεπλεγμένη Euler παίρνει την ακόλουθη μορφή

$$y_{n+2} = y_n + \frac{h}{3}((1 - 2t_{n+2})y_{n+2} + 4(1 - 2t_{n+1})y_{n+1} + (1 - 2t_n)y_n), \quad n = 0, \dots, N - 2.$$

Οπότε λύνοντας ως προς y_{n+2} παίρνουμε

$$(1 - \frac{h}{3}(1 - 2t_{n+2}))y_{n+2} = y_n + \frac{h}{3}(4(1 - 2t_{n+1})y_{n+1} + (1 - 2t_n)y_n) \quad n = 0, \dots, N - 1$$

ή

$$y_{n+2} = \frac{1}{1 - \frac{h}{3}(1 - 2t_{n+2})} (y_n + \frac{h}{3}(4(1 - 2t_{n+1})y_{n+1} + (1 - 2t_n)y_n)) \quad n = 0, \dots, N - 1$$

Άλλες πεπλεγμένες διβηματικές μέθοδοι είναι η μέθοδος Adams Multon(2) και η BDF(2)

Μέθοδος Adams Multon(2) Για δοσμένα y_0, y_1 ,

$$y_{n+2} = y_{n+1} + h(\frac{5}{12}f(t_{n+2}, y_{n+2}) + \frac{2}{3}f(t_{n+1}, y_{n+1}) - \frac{1}{12}f(t_n, y_n)), \quad n = 0, \dots, N - 2.$$

Μέθοδος BDF(2) Για δοσμένα y_0, y_1 ,

$$y_{n+2} - \frac{4}{3}y_{n+1} + \frac{1}{3}y_n = \frac{2}{3}hf(t_{n+2}, y_{n+2}), \quad n = 0, \dots, N - 2.$$

Άσκηση 4: Για το ΠΑΤ που έχετε θεωρήσει μέχρι τώρα φτιάξτε ένα πίνακα των σφαλμάτων της παρακάτω μορφής χρησιμοποιήστε ακρίβεια 4 δεκαδικών ψηφίων, η y_1 θα δίνεται χρησιμοποιώντας τη πεπλεγμένη μέθοδο του Euler,

N	Πεπλεγμένη Euler	p	Μέθοδος Simpson	p	AM(2)	p	BDF(2)	p
100								
200								
300								
400								
500								

Ποιά μέθοδο θα προτιμήσετε;