6ο Εργαστήριο

Για την αριθμητική επίλυση ενός προβλήματος αρχικών τιμών (Π.Α.Τ.)

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad t \in [a, b], \quad y(0) = y_0$$

θεωρήσαμε πεπλεγμένες μονοβηματικές μεθόδους όπως η πεπλεγμένη Euler ή Τραπεζίου.

Για να υπολογίσουμε την τιμή y_{n+1} χρειάζεται να λύσουμε (στη γενική περίπτωση που η f είναι μη γραμμική ως προς y) μια μη γραμμική εξίσωση. Ένας τρόπος είναι χρησιμοποιήσουμε μια επαναληπτική διαδικασία όπως στον υπολογισμό του σταθερού σημείου. Έτσι, σε κάθε βήμα του αλγορίθμου της πεπλεγμένης Euler, για τον υπολογισμό δηλαδή του y_{n+1} θέτουμε

$$g(s) = y_n + hf(t_{n+1}, s),$$

και αναζητούμε $s^\star$ τέτοιο ώστε

$$s^\star = g(s^\star).$$

Επειδή μπορούμε μόνο να προσεγγίσουμε το $s^\star$, την προσέγγιση s_k που θα υπολογίσουμε χρησιμοποιώντας την επαναληπτική διαδικασία του σταθερού σημείου, θα θέσουμε ως y_{n+1}, δηλαδή θεωρούμε την ακολουθία

$$s_{k+1} = g(s_k), k = 0, \dots,$$

για δοσμένο tol, υπολογίζουμε το s_k τέτοιο ώστε $|s_k - s_{k-1}| \leq tol$ και θέτουμε

$$y_{n+1} = s_k$$

και προχωράμε για την επόμενη προσέγγιση της μεθόδου πεπεπλεγμένης Euler.

Την ίδια διαδικασία μπορούμε να εφαρμόσουμε και για πολυβηματικές μεθόδους. Θεωρείστε τη μέθοδο Adams Multon(2) και τη BDF(2)

Μέθοδος Adams Multon(2) Για δοσμένα y_0, y_1,

$$y_{n+2} = y_{n+1} + h(\frac{5}{12}f(t_{n+2}, y_{n+2}) + \frac{2}{3}f(t_{n+1}, y_{n+1}) - \frac{1}{12}f(t_n, y_n)), \quad n = 0, \dots, N-2.$$

Μέθοδος BDF(2) Για δοσμένα y_0, y_1,

$$y_{n+2} - \frac{4}{3}y_{n+1} + \frac{1}{3}y_n = \frac{2}{3}hf(t_{n+2}, y_{n+2}), \quad n = 0, \dots, N-2.$$

Άσκηση 1: Έστω $y(t) = (t^2+1)^2$, στο $[0,2]$ η οποία είναι λύση στο

$$y'(t) = 4t(y(t))^{1/2}, \quad t \in [0,2], \quad y(0) = 1.$$

Θεωρείστε τις μεθόδους Adams Multon(2) και τη BDF(2), ένα διαμερισμό του $[0,2]$ σε $N+1$ σημεία, και για να υλοποιήσετε αυτές τις δύο μεθόδους χρησιμοποιήστε τις αρχικές τιμές $y_0 = 1$ και y_1 να δίνεται από την άμεση μέθοδο του Euler. Βρείτε το σφάλμα $\max_{0\leq n\leq N}|y_n - y(t_n)|$, για $N = 20, 40, 80, 160$ καθώς και τις τιμές για $t = 0.5, 1, 1.5, 2$. Παρατηρήστε ότι καθώς το N αυξάνει ή το h ελαττώνετε οι τιμές y_n τείνουν να σταθεροποιηθούν. (Δηλαδή η μέθοδος φαίνεται να συγκλίνει)

In [1]:

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
def y_exact(t):
    s=(t**2+1)**2
    return s

def f(t,y):
    s=4*t*y**(1/2)
    return s

def g(t,x,y1,y0):
    # Οι μεταβλητες y1, y0 ειναι οι προσεγγίσεις στα 2 προηγουμενα βηματα
    # Η μεταβλητή x είναι η προσεγγιση που έχουμε ήδη βρει στον αλγόριθμο σταθερου σημείου

    #s=(1/3)*(4*y1-y0)+(2*h/3)*f(t,x) # BDF-2
    s=y1+h*((5/12)*f(t,x)+ (2/3)*f(t-h,y1)-(1/12)*f(t-2*h,y0) )# AM2
    return s

### Παρακάτω δίνετε Η μεθοδος μόνο για τη μια περιπτωση N
### Πρεπει να δημιουργησετε μια επαναληψη για να τρεξετε για ολες τις περιπτωσεις N

#### BDF2 (Μη γραμμική f ως προς y)
N=20
t=np.linspace(0,2,N+1)
h=t[1]-t[0]

y=np.zeros(N+1)
y[0]=1
y[1]=y[0]+h*f(t[0],y[0]) # Πρώτο βήμα με την άμεση Euler


### Θετουμε TOL και NMAX μεγιστο αριθμό επαναλήψεων για τον υπολογισμό της μη-γραμμικής εξίσωσης
tol=1.e-3
Nmax=100

# Προσοχή στον αριθμο των επαναλήψεων
#Στη διβηματικη μεθοδο κανουμε 1 λιγοτερη επαναληψη
for i in range(N-1):

    x0=y[i+1] #αρχική προσέγγιση στο i+1-βημα
    k=0
    err=1. #Θετουμε αρχικά το σφάλμα ίσον με 1 για να ξεκινήσει η διαδικασία

    while (err>tol) and (k<=Nmax):
        x=g(t[i+2],x0,y[i+1],y[i])  # επόμενη προσέγγιση
        err=abs(x-x0) #σφάλμα
        k=k+1 # αυξάνουμε τον μετρητή βημάτων
        x0=x;

    y[i+2]=x  #τελειώνει η επαναληψη σταθερου σημειου και θέτουμε τη προσεγγιση που βρηκαμε
    ###########   ως την προσεγγιση της λύσης στο σημείο t[i+1]



err_y=max(abs(y_exact(t)-y)) #σφάλμα
print('Μέγιστο σφάλμα για N=',N,':',err_y)

print('h=',h)
n0=int(N/4)
n=n0
print('t=',n*h,' ',y[n])
n=2*n0
print('t=',n*h,' ',y[n])
n=3*n0
print('t=',n*h,' ',y[n])
n=N
print('t=',n*h,' ',y[n])
```

```
Μέγιστο σφάλμα για N= 20 : 0.09527370470176066
h= 0.1
t= 0.5   1.5380110275157484
t= 1.0   3.9613493105981523
t= 1.5   10.500235080832628
t= 2.0   24.90472629529824
```

Άσκηση 2: Έστω $y(t) = (t^2+1)^2$, στο $[0,2]$ η οποία είναι λύση στο

$$y'(t) = 4t(y(t))^{1/2}, \quad t \in [0,2], \quad y(0) = 1.$$

Θεωρείστε τη ακόλουθη 2-βηματική μέθοδο:
Για δοσμένα y_0, y_1,

$$y_{n+2} - y_{n+1} = \frac{h}{12}(4f(t_{n+2}, y_{n+2}) + 8f(t_{n+1}, y_{n+1}) - f(t_n, y_n)), \quad n = 0, \dots, N-2.$$

Θεωρήστε ένα διαμερισμό του $[0,2]$ σε $N+1$ σημεία, και για να υλοποιήσετε αυτές τις δύο μεθόδους χρησιμοποιήστε τις αρχικές τιμές $y_0 = 1$ και y_1 να δίνεται από την άμεση μέθοδο του Euler. Βρείτε το σφάλμα $\max_{0\leq n\leq N}|y_n - y(t_n)|$, για $N = 20, 40, 80, 160$ καθώς και τις προσεγγίσεις για $t = 0.5, 1, 1.5, 2$. Παρατηρήστε ότι καθώς το N αυξάνει ή το h ελαττώνετε οι τιμές y_n τείνουν να σταθεροποιηθούν. (Δηλαδή η μέθοδος φαίνεται να συγκλίνει), όμως το σφάλμα δεν μειώνετε!

In [ ]:

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
def y_exact(t):
    #s=t/(1+t**2)
    s=(t**2+1)**2
    return s

def f(t,y):
    #s=1/(1+t**2)-2*y**2
    s=4*t*y**(1/2)
    return s

def g(t,x,y1,y0):
    #s=(1/3)*(4*y1-y0)+(2*h/3)*f(t,x) # BDF-2
    #s=y1+h*((5/12)*f(t,x)+ (2/3)*f(t-h,y1)-(1/12)*f(t-2*h,y0) )# AM2
    s=y1+(h/12)*(4*f(t,x)+ 8*f(t-h,y1)-f(t-2*h,y0) ) # μη-συνεπης
    return s

### Το μόνο που αλλάζει σε σχεση με την Ασκηση 1 είναι η μέθοδος. Τροποποιουμε καταλληλα τη συναρτηση g
```

Άσκηση 3: Θεωρείστε τις προσεγγίσεις y_n που προκύπτουν στην προηγούμενη Άσκηση 2, και τη συνάρτηση $\tilde{y}(t) = (\frac{11}{12}t^2+1)^2$. Υπολογίστε τα σφάλματα $\max_{0\leq n\leq N}|y_n - \tilde{y}(t_n)|$, για $N = 20, 40, 80, 160$. Τείνουν αυτά στο 0;

Παρατήρηση για τις Ασκήσεις 2 και 3:Η μέθοδος που θεωρήσαμε στην Άσκηση 2, μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι είναι ευσταθής αλλά όχι συνεπής (ελέγχουμε αν τα αντίστοιχα χαρακτηριστικά πολυώνυμα ικανοποιούν τις απαραίτητες συνθήκες). Επομένως σύμφωνα με τη θεωρία βλέπουμε ότι δεν είναι συγκλίνουσα και άρα οι προσεγγίσεις y_n για το ΠΑΤ της Άσκησης 2 δεν θα συγκλίνουν στην λύση του ΠΑΤ $y(t)$, αλλά σε μία άλλη συνάρτηση την $\tilde{y}(t)$. Μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι η $\tilde{y}$ είναι λύση του ΠΑΤ

$$y'(t) = \frac{11}{12}4t(y(t))^{1/2}, \quad t \in [0,2], \quad y(0) = 1.$$

Δηλαδή οι προσεγγίσεις που παίρνουμε με μια μη συνεπή λύση οδηγούν στη λύση ενός άλλου προβλήματος από αυτό που θέλουμε να λύσουμε!

Άσκηση 4: Έστω $y(t) = e^{-10t}$, στο $[0,2]$ η οποία είναι λύση στο

$$y'(t) = -10y(t), \quad t \in [0,2], \quad y(0) = 1.$$

Θεωρείστε τη ακόλουθη μέθοδο:
Για δοσμένα y_0, y_1,

$$y_{n+2} + y_{n+1} - 2y_n = \frac{h}{4}(f(t_{n+2}, y_{n+2}) + 8f(t_{n+1}, y_{n+1}) + 3f(t_n, y_n)), \quad n = 0, \dots, N-2.$$

Θεωρήστε ένα διαμερισμό του $[0,2]$ σε $N+1$ σημεία, και για να υλοποιήσετε αυτές τις δύο μεθόδους χρησιμοποιήστε τις αρχικές τιμές $y_0 = 1$ και y_1 να δίνεται από την άμεση μέθοδο του Euler. Βρείτε το σφάλμα $\max_{0\leq n\leq N}|y_n - y(t_n)|$, για $N = 20, 40, 80, 160$ καθώς και τις προσεγγίσεις για $t = 0.5, 1, 1.5, 2$. Παρατηρήστε ότι καθώς το N αυξάνει ή το h ελαττώνετε, οι τιμές y_n γίνονται πολύ μεγάλες. (Δηλαδή η μέθοδος φαίνεται να αποκλίνει και να είναι ασταθής).

Παρατήρηση: Η μέθοδος που θεωρήσαμε, μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι δεν είναι ευσταθής αλλά είναι συνεπής. Επομένως βλέπουμε ότι δεν είναι συγκλίνουσα και άρα οι προσεγγίσεις y_n για το ΠΑΤ της άσκησης δεν θα συγκλίνουν στην λύση του ΠΑΤ $y(t)$.

Συστήματα Διαφορικών εξισώσεων

Θεωρούμε τώρα το ακόλουθο σύστημα διαφορικών εξισώσεων

$$x'(t) = \frac{5}{100}x(t)(1 - \frac{1}{100}y(t)), \quad y'(t) = \frac{1}{10}y(t)(\frac{5}{1000}x(t) - 2),\ t \in [0, 150], x(0) = 500,\ y(0) = 100$$

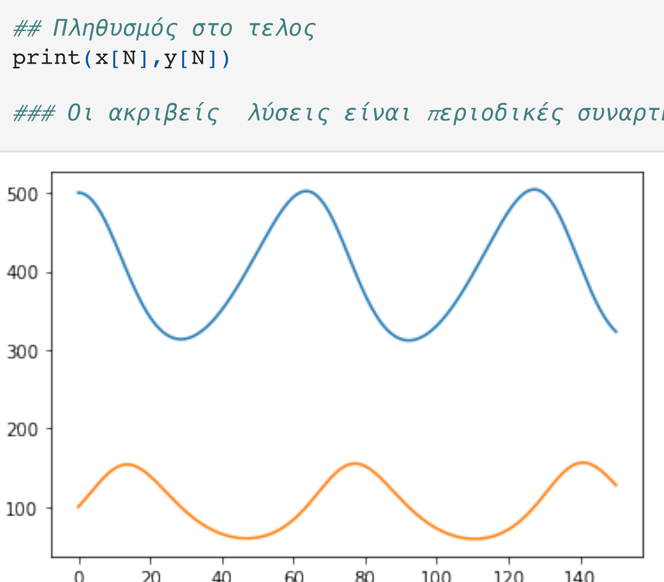
Αυτό είναι ένα σύστημα που περιγράφει τη εξέλιξη του πλυθυσμού λαγών και αλεπούδων, όπου $x(t)$ είναι ο πλυθυσμός των λαγών και $y(t)$ των αλεπούδων.

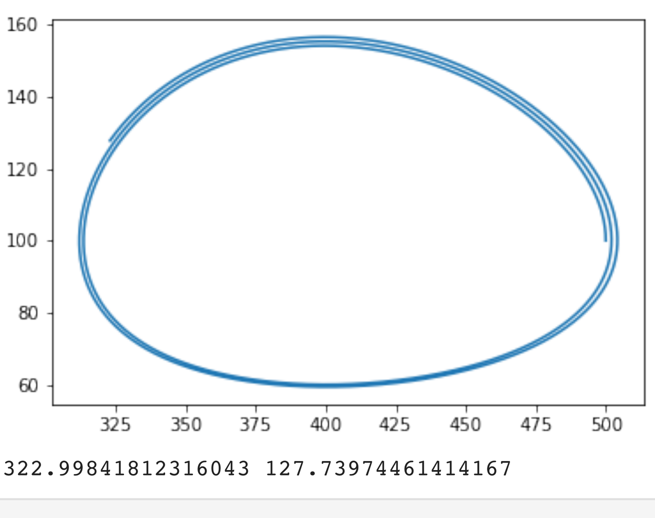
Άσκηση 5: Θεωρείστε το παραπάνω σύστημα Δ.Ε. και μια διαμέριση του $[0, 150]$, με $N = 2500$ και εφαρμόστε τη άμεση μέθοδο του Euler, τη μέθοδο του μέσου και τη μέθοδο Adams-Bashforth(2) για συστήματα για να βρείτε τις προσεγγίσεις (x_n, y_n) των $(x(t_n), y(t_n)), n = 0, \dots, N$.

1. Δημιουργείστε τη γραφική παράσταση των λύσεων ως προς το χρόνο t.
2. Δημιουργείστε τη γραφική παράσταση των 2 προσεγγίσεων (x_n, y_n) στο πεδίο xy.
3. Ποιός είναι ο πλυθυσμός των λαγών και των αλεπούδων για χρόνο $t = 150$;
4. Αν μεταβάλετε (αυξήσετε ή μειώσετε) τον αριθμό των σημείων N, ο πληθυσμός στο χρόνο $t = 150$ μεταβάλετε πολύ;
5. Ποιά μέθοδο πιστεύετε οτι δίνει καλυτερα αποτελέσματα;

In [4]:

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
def f1(t,x,y):
    return (0.05)*x*(1-0.01*y)
def f2(t,x,y):
    return (0.1)*y*(0.005*x-2)


N=2500
t=np.linspace(0,150,N+1)
h=t[1]-t[0]

x=np.zeros(N+1)
y=np.zeros(N+1)

x[0]=500
y[0]=100

### Αμεση Euler
for i in range(N):
    x[i+1]=x[i]+h*f1(t,x[i],y[i])
    y[i+1]=y[i]+h*f2(t,x[i],y[i])

### Γραφική παρασταση των 2 συναρτήσεων
plt.plot(t,x,t,y)
plt.show()

### Γραφική παράσταση xy-επιπεδο
plt.plot(x,y)
plt.show()

## Πληθυσμός στο τελος
print(x[N],y[N])

### Οι ακριβείς  λύσεις είναι περιοδικές συναρτήσεις. Όσο μεγαλώνει ο αριθμός των σημείων N, το παρατηρουμε καλυτερα.
```






```
322.99841812316043 127.73974461414167
```

In [ ]: