9ο Εργαστήριο - Runge-Kutta.

Για την αριθμητική επίλυση ενός προβλήματος αρχικών τιμών (Π.Α.Τ.)

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad t \in [a, b], \quad y(0) = y_0$$

μπορούμε να θεωρήσουμε και τις μεθόδους Runge - Kutta. Αυτές οι μέθοδοι είναι μονοβηματικές περιγράφονται από ένα μητρώο Butcher q σταδίων, που δίνεται ως

$$\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1q} & \tau_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{q1} & \dots & a_{qq} & \tau_q \\ \hline \\ b_1 & \dots & b_q & \end{array}$$

και χρησιμοποιούν προσεγγίσεις της ακριβούς λύσης σε σημεία ενδιάμεσα των t_n και t_{n+1}, $t_{n,i} = t_n + \tau_i h$, $i = 1, \dots, q$, ως εξής: Κατασκευάζουμε τις τιμές $y_{n,i}$, $i = 1, \dots q$, σύμφωνα με

$$y_{n,i} = y_n + h \sum_{j=1}^{q} a_{ij} f(t_{n,j}, y_{n,j}), \quad i = 1, \dots, q,$$

και

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{j=1}^{q} b_i f(t_{n,i}, y_{n,i})$$

Αν ισχύει ότι $a_{ij} = 0$, $i \leq j$ τότε έχουμε μια άμεση μέθοδο Runge-Kutta γιατί ο προσδιορισμός των τιμών $y_{n,i}$, $i = 1, \dots q$ γίνεται με άμεσο τρόπο, χωρίς τη λύση κάποιου συστήματος.

Αν η συνάρτηση f είναι μη γραμμική ως προς τη δεύτερη μεταβλητή της, y, τότε για να προσδιορίσουμε τις τιμές $y_{n,i}$, $i = 1, \dots, q$ χρειάζεται να λύσουμε ένα μη γραμμικό σύστημα q εξισώσεων με q αγνώστους.

Άσκηση 1: Έστω $y(t) = (t^2 + 1)^2$, στο $[0, 2]$ η οποία είναι λύση στο

$$y'(t) = 4t(y(t))^{1/2}, \quad t \in [0, 2], \quad y(0) = 1.$$

Θεωρείστε τη μέθοδο Runge-Kutta

$$\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \hline \\ 0 & 1 & \end{array}$$

Θεωρήστε ένα διαμερισμό του $[0,2]$ σε $N+1$ σημεία, και για να υλοποιήσετε αυτές τις δύο μεθόδους χρησιμοποιήστε την αρχική τιμή $y_0 = 1$.

Βρείτε το σφάλμα $\max_{0\le n\le N} |y_n - y(t_n)|$, για $N = 20, 40, 80, 160$ καθώς και την προσεγγιστική τάξη σύγκλισης p.

Παρατήρηση: Η μέθοδος είναι μια άμεση μονοβηματική μέθοδος 2 σταδίων και είναι τάξη ακρίβειας είναι $p = 2$. Η απλή μονοβηματικη μέθοδος Euler έχει τάξη κατά ένα λιγότερο

Άσκηση 2: Επαναλάβατε την προηγούμενη άσκηση για την ακόλουθη μέθοδο Runge-Kutta 3-σταδίων

$$
\begin{array}{ccc|c}
0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\
0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\
\hline
\frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} &
\end{array}
$$

Παρατήρηση: Η μέθοδος είναι μια άμεση μονοβηματική μέθοδος 3 σταδίων και είναι τάξη ακρίβειας είναι $p = 3$.

Άσκηση 3: Επαναλάβατε την προηγούμενη άσκηση για την ακόλουθη μέθοδο Runge-Kutta 4-σταδίων

$$
\begin{array}{cccc|c}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\
0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
\hline
\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} &
\end{array}
$$

Παρατήρηση: Η μέθοδος είναι μια άμεση μονοβηματική μέθοδος 4 σταδίων και είναι τάξη ακρίβειας είναι $p = 4$.

Πεπλεγμένες μέθοδοι Runge-Kutta

Οι πεπλεγμένες μέθοδοι Runge-Kutta, με στοιχεία $a_{ij} \neq 0$, $i \le j$, χωρίζονται σε δύο είδη

1. στις ημιπλεγμένες, με μη μηδενικά στοιχεία στη διαγώνιο $a_{ii} \neq 0$ και μηδενικά στοιχεία πάνω από τη διαγώνιο, $a_{ij} = 0$, $i
2. και στις πλήρως πεπλεγμένες

Ημιπεπλεγμένες μέθοδοι

Στην περίπτωση των ημιπεπλεγμένων μεθόδων χρειάζεται να λύσουμε μια μη γραμμική εξίσωση q φορές, για να προσδιορίσουμε τις τιμές $y_{n,i}$, $i = 1, \ldots, q$. Αν έχουμε προσδιορίζει τα $y_{n,j}$ για $j = 1, \ldots, i-1$ τότε το $y_{n,i}$ είναι η λύση της μη-γραμμικής εξίσωσης

$$y_{n,i} = y_n + h \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} f(t_{n,j}, y_{n,j}) + h a_{ii} f(t_{n,i}, y_{n,i})$$

Την $y_{n,i}$ την προσδιορίζουμε με ανάλογο τρόπο όπως υλοποίησαμε τις πεπλεγμένες μεθόδους μέχρι τώρα. Αφού βρούμε όλες τις τιμές $y_{n,i}$, $i = 1, \ldots, q$, ο υπολογισμός της y_{n+1} είναι άμεσος.
Άσκηση 4: Επαναλάβατε την προηγούμενη άσκηση για τις ακόλουθες ημιπεπλεγμένες μεθόδους Runge-Kutta 2-σταδίων

$$\begin{array}{cc|c} \mu & 0 & \mu \\ 1-2\mu & \mu & 1-\mu \\ \hline \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \end{array}$$

για $\mu = \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}$
Παρατήρηση: Η μέθοδος είναι μια ημιπεπλεγμενη μονοβηματική μέθοδος 2 σταδίων και είναι η τάξη ακρίβειας p είναι: $p = 2$ για $\mu = \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$ και $p = 3$ για $\mu = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}$.

Πλήρως πεπλεγμένες μεθόδοι

Στην περίπτωση των πλήρως πεπλεγμένων μεθόδων Runge-Kutta για να προσδιορίσουμε τις τιμές $y_{n,i}$, $i = 1, \ldots, q$ χρειάζεται να λύσουμε ένα μη γραμμικό σύστημα q εξισώσεων με q αγνώστους. Δεν προσδιορίζουμε τις τιμές $y_{n,i}$ μία κάθε φορά, αλλά όλες μαζί. Λύνουμε δηλαδή μια διανυσματική μη- γραμμική εξίσωση.

Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $Y \in \mathbb{R}^q$, $Y_i = y_{n,i}$, $i = 1, \ldots, q$. Τότε λύνουμε τη μη-γραμμική εξίσωση

$$Y = F(t_n, Y)$$

όπου

$$F(t_n, Y) = \begin{pmatrix} y_n + h \sum_{j=1}^{q} a_{1j} f(t_{n,j}, y_{n,j}) \\ \vdots \\ y_n + h \sum_{j=1}^{q} a_{qj} f(t_{n,j}, y_{n,j}) \end{pmatrix}$$

Άσκηση 5: Επαναλάβετε την προηγούμενη άσκηση για την ακόλουθη πεπλεγμένη μέθοδο Runge-Kutta 2-σταδίων

$$
\begin{array}{cc|c}
\frac{1}{4} & \frac{1}{4}-\mu & \frac{1}{2}-\mu \\
\frac{1}{4}+\mu & \frac{1}{4} & \frac{1}{2}+\mu \\
\hline
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} &
\end{array}
$$

για $\mu = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$

Παρατήρηση: Η μέθοδος είναι μια πεπλεγμενη μονοβηματική μέθοδος 2 σταδίων με τάξη ακρίβειας $p = 4$.