3ο Εργαστήριο

Για την αριθμητική επίλυση ενός προβλήματος αρχικών τιμών (Π.Α.Τ.)

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad t \in [a, b], \quad y(0) = y_0$$

θεωρήσαμε άμεσες μεθόδους όπως του Euler αλλά και πεπλεγμένες μεθόδους όπως του Euler και του τραπεζίου. Έστω ένας ομοιόμορφος διαμερισμός του $[a, b]$, στα σημεία $t_n = a + nh$, $n = 0, \ldots, N$, με βήμα $h = \dfrac{b-a}{N}$, υπολογίζουμε τις τιμές y_n που αποτελούν προσεγγίσεις στις τιμές $y(t_n)$, $n = 0, \ldots, N$.

Άμεση Euler

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n), \quad n = 0, \ldots, N-1.$$

Πεπλεγμένη Euler

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_{n+1}, y_{n+1}), \quad n = 0, \ldots, N-1.$$

Μέθοδος του τραπεζίου

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f(t_{n+1}, y_{n+1}) + f(t_n, y_n)), \quad n = 0, \ldots, N-1.$$

Για να μπορέσουμε να βρούμε την προσέγγιση αν θεωρήσουμε μια πεπλεγμένη μέθοδο θα χρειαστεί να βρούμε τη ρίζα μιας μη-γραμμικής συνάρτησης σε κάθε βήμα. Αν όμως η συνάρτηση f είναι γραμμική ως προς y, π.χ. $f(t, y) = g(t)y$, τότε οι παραπάνω πεπλεγμένες μέθοδοι υλοποιούνται εύκολα, π.χ.
Πεπλεγμένη Euler

$$y_{n+1} = \frac{1}{1 - hg(t_{n+1})} y_n, \quad n = 0, \ldots, N-1.$$

η **Μέθοδος του τραπεζίου**

$$y_{n+1} = \frac{1 + h\dfrac{g(t_n)}{2}}{1 - h\dfrac{g(t_{n+1})}{2}} y_n, \quad n = 0, \ldots, N-1.$$

Άσκηση 1: Έστω $y(t) = e^{0.25-(t-0.5)^2}$, στο $[0, 4]$ η οποία είναι λύση στο

$$y'(t) = (1 - 2t)y(t), \quad t \in [0, 4], \quad y(0) = 1.$$

Θεωρείστε την άμεση μέθοδο του Euler, την πεπλεγμένη μέθοδο του Euler και τη μέθοδο τραπεζίου. Θεωρήστε ένα διαμερισμό του $[0, 4]$ σε $N + 1$ σημεία. Για $N = 50$, κατασκευάστε τις προσεγγίσεις που δίνουν οι τρεις μέθοδοι, δημιουργείστε τις γραφικές παράστασεις της προσεγγιστικής λύσης και της ακριβούς στο διάστημα $[0, 4]$. Στη συνέχεια βρείτε το σφάλμα $\max_{0 \le n \le N} |y_n - y(t_n)|$. Για $N = 100, 200, 300, 400, 500$ βρείτε τη πειραματική τάξη σύγκλισης για κάθε μια από τις τρεις μεθόδους

Μη γραμμική f ως προς y

Σε αυτή την περίπτωση για να υπολογίσουμε τις προσεγγίσεις χρησιμοποιώντας μια πεπλεγμένη μέθοδο πρέπει να βρούμε τη λύση μιας μη γραμμικής εξίσωσης σε κάθε βήμα. Μια μέθοδος είναι π.χ. η μέθοδος του σταθερού σημείου.

Μέθοδος σταθερού σημείου

Για να βρούμε τη λύση της εξίσωσης $x^\star = g(x^\star)$, για x_0 δοσμένο δημιουργούμε την ακολουθία x_k

$$x_{k+1} = g(x_k), n = 0, \ldots$$

Αν x_k συγκλίνει τότε $x_k \to x^\star$. Επειδή δεν μπορούμε να βρούμε ακριβώς το $x^\star$ αλλά μια προσέγγιση, πρέπει ο αλγόριθμος να σταματά μετά από κάποια βήματα. Ένα κριτήριο τερματισμού του αλγορίθμου είναι να θέσουμε ότι η διαφορά δυο συνεχόμενων προσεγγίσεων x_k να γίνει μικρότερη από έναν προκαθορισμένο αριθμό TOL. Ετσι τερματίζουμε την επαναλαληπτική διαδικασια και δεχομαστε ως προσέγγιση της $x^\star$ to x_k όταν $|x_k - x_{k-1}| \leq TOL$. Επειδή μπορεί να δημιουργηθούν και άλλα σφάλματα και το προηγούμενο κριτήριο να μην ικανοποιείτε ποτέ, θέτουμε και για ασφάλεια ένα μέγιστο αριθμό επαναλήψεων $Nmax$. Δηλαδή δεχόμαστε ως $x^\star$ είτε το x_k που πρώτη φορά ικανοποιείται το κριτήριο τερματισμού ή το x_{Nmax}.

Άσκηση 2 (για την εύρεση ενός σταθερού σημεί: Έστω $g(t) = \cos(t)$, στο $[0, 1]$. Θέλουμε να βρούμε το σημείο $x^\star \in [0, 1]$ τέτοιο ώστε

$$x^\star = \cos(x^\star).$$

Φτιάξτε μια επαναληπτική διαδικασία ώστε να προσεγγίσετε το $x^\star$, ξεκινώντας από $x_0 = 1$. Για κριτήρια τερματισμού, θέσετε μέγιστο αριθμό επαναλήψεων $Nmax = 500$ και $TOL = 10^{-8}$.

Πεπλεγμένη Euler

Μια πεπλεγμένη μέθοδος είναι η **πεπλεγμένη Euler**

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_{n+1}, y_{n+1}), \quad n = 0, \ldots, N-1.$$

Για να υπολογίσουμε την τιμή y_{n+1} χρειάζεται να λύσουμε (στη γενική περίπτωση που η f είναι μη γραμμική ως προς y) μια μη γραμμική εξίσωση. Ένας τρόπος είναι χρησιμοποιήσουμε μια επαναληπτική διαδικασία όπως στον υπολογισμό του σταθερού σημείου. Έτσι, σε κάθε βήμα του αλγορίθμου της πεπλεγμένης Euler, για τον υπολογισμό δηλαδή του y_{n+1} θέτουμε

$$g(s) = y_n + hf(t_{n+1}, s),$$

και αναζητούμε $s^\star$ τέτοιο ώστε

$$s^\star = g(s^\star).$$

Επειδή μπορούμε μόνο να προσεγγίσουμε το $s^\star$, την προσέγγιση s_k που θα υπολογίσουμε χρησιμοποιώντας την επαναληπτική διαδικασία του σταθερού σημείου, θα θέσουμε ως y_{n+1}, δηλαδή θεωρούμε την ακολουθία

$$s_{k+1} = g(s_k), k = 0, \ldots,$$

για δοσμένο tol, υπολογίζουμε το s_k τέτοιο ώστε $|s_k - s_{k-1}| \leq tol$ και θέτουμε

$$y_{n+1} = s_k$$

και προχωράμε για την επόμενη προσέγγιση της μεθόδου πεπεπλεγμένης Euler.

</p>

Άσκηση 3: θεωρείστε την πεπλεγμένη μέθοδο του Euler για τον υπολογισμό της λύσης του προβλήματος

$$y'(t) = \frac{1}{1+t^2} - 2(y(t))^2, \quad t \in [0,1], \quad y(0) = 0.$$

Η ακριβή λύση του προβλήματος είναι $y(t) = \dfrac{t}{1+t^2}$. Βρείτε το σφάλμα $\max_{0\le n\le N} |y_n - y(t_n)|$. Για $N = 100, 200, 300, 400, 500$ βρείτε τη πειραματική τάξη σύγκλισης για την πεπλεγμένη μεθόδο του Euler. Θεωρείστε για κάθε βήμα, μέγιστο αριθμό επαναλήψεων $Nmax = 500$ και $TOL = 10^{-8}$

Άσκηση 4: Επαναλάβετε το πρόβλημα για τη μέθοδο του τραπεζίου.

In [ ]:

```

```