

4ο Εργαστήριο

Ευστάθεια

Για την αριθμητική επίλυση ενός προβλήματος αρχικών τιμών (Π.Α.Τ.)

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad t \in [a, b], \quad y(0) = y_0$$

θεωρήσαμε άμεσες μεθόδους όπως του Euler αλλά και πεπλεγμένες μεθόδους όπως του Euler και του τραπεζίου. Έστω ένας ομοιόμορφος διαμερισμός του $[a, b]$, στα σημεία $t_n = a + nh$, $n = 0, \dots, N$, με βήμα $h = \frac{b-a}{N}$, υπολογίζουμε τις τιμές y_n που αποτελούν προσεγγίσεις στις τιμές $y(t_n)$, $n = 0, \dots, N$.

Άμεση Euler

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n), \quad n = 0, \dots, N-1.$$

Πεπλεγμένη Euler

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_{n+1}, y_{n+1}), \quad n = 0, \dots, N-1.$$

Μέθοδος του τραπεζίου

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f(t_{n+1}, y_{n+1}) + f(t_n, y_n)), \quad n = 0, \dots, N-1.$$

Άσκηση 1: Έστω $y(t) = \frac{50}{2501}(\sin(t) + 50 \cos(t)) - \frac{2500}{2501}e^{-50t}$, στο $[0, 1]$ η οποία είναι λύση στο $y'(t) = -50(y(t) - \cos(t))$, $t \in [0, 1]$, $y(0) = 0$.

Θεωρείστε την άμεση μέθοδο του Euler, την πεπλεγμένη μέθοδο του Euler και τη μέθοδο τραπεζίου.

Θεωρήστε ένα διαμερισμό του $[0, 1]$ σε $N + 1$ σημεία. Για $N = 20$, κατασκευάστε τις προσεγγίσεις που δίνουν οι τρεις μέθοδοι, δημιουργήστε τις γραφικές παράστασεις της προσεγγιστικής λύσης και της ακριβούς στο διάστημα $[0, 1]$. Στη συνέχεια βρείτε το σφάλμα $\max_{0 \leq n \leq N} |y_n - y(t_n)|$ και δημιουργήστε τις γραφικές παράστασεις του σφάλματος $e_n = |y_n - y(t_n)|$. Αυξήστε το $N = 30, 40, 50, 60$, και παρατηρήστε τη συμπεριφορά των τριών μεθόδων.

Άσκηση 2: Επαναλάβετε την παραπάνω άσκηση για $y(t) = \frac{100}{100^2+1}(\sin(t) + 100 \cos(t)) - \frac{100^2}{100^2+1}e^{-100t}$, στο $[0, 1]$ η οποία είναι λύση στο $y'(t) = -100(y(t) - \cos(t))$, $t \in [0, 1]$, $y(0) = 0$,

για διαμερισμούς με $N = 30, 50, 80, 100$, και παρατηρήστε τη συμπεριφορά των τριών μεθόδων.

Συστήματα Διαφορικών εξισώσεων

Θεωρούμε τώρα το ακόλουθο σύστημα διαφορικών εξισώσεων

$$Y'(t) = F(t, Y(t)),$$

όπου Y είναι μια διανυσματική συνάρτηση, $Y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ και $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$. Στην περίπτωση που η F είναι γραμμική ως προς Y , τότε το σύστημα ΔΕ, μπορεί να είναι της μορφής

$$Y'(t) = A(t)Y(t) + G(t),$$

όπου $A(t) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ και $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$. Παραδείγματος χάριν

$$x'(t) = -y(t), \quad y'(t) = x(t),$$

μπορούμε να το γράψουμε ως

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}' = A \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \quad \text{με } A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ένα άλλο παράδειγμα είναι

$$x'(t) = x(t) + 2y(t) + 1, \quad y'(t) = -x(t) + y(t) + t,$$

το οποίο μπορούμε να το γράψουμε ως

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}' = A \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + G(t), \quad \text{με } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{και } G(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$$

Στην περίπτωση που η μέθοδος μας είναι πεπλεγμένη (π.χ. Πεπλεγμένη Euler) και η F είναι γραμμική ως προς Y , τότε μπορούμε να υπολογίσουμε ακριβώς τη προσέγγιση στο επόμενο βήμα. Π.χ. για την πεπλεγμένη Euler, αν Y^n είναι η προσέγγιση της $Y(t_n)$ τότε

$$Y^{n+1} = Y^n + h(A(t_{n+1})Y^{n+1} + G(t_{n+1}))$$

δηλαδή

$$(I - hA(t_{n+1}))Y^{n+1} = Y^n + hG(t_{n+1})$$

Οπότε σε κάθε βήμα η Y^{n+1} είναι η λύση ενός γραμμικού συστήματος με πίνακα $I - hA(t_{n+1})$ και δεξί μέλος $Y^n + hG(t_{n+1})$.

Για τη λύση ενός γραμμικού συστήματος μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη εντολή `solve` της βιβλιοθήκης `numpy.linalg`

Άσκηση 3: Θεωρούμε το ΠΑΤ

$$x'(t) = x(t) + 2y(t) + 1, \quad y'(t) = -x(t) + y(t) + t, \quad t \in [0, 5], \quad x(0) = 2, \quad y(0) = -1.$$

Χρησιμοποιήστε την Άμεση Μέθοδο Euler, την Πεπλεγμένη Euler και τη μέθοδο Τραπεζίου για να υπολογίσετε τη προσέγγιση για $t = 5$. Φτιάξτε ένα πίνακα των τιμών προσεγγίσεων για $t = 5$ της παρακάτω μορφής χρησιμοποιήστε ακρίβεια 4 δεκαδικών ψηφίων. Οι ακριβείς τιμές είναι $(x(5), y(5)) = (85.4600, -223.8247)$.

N	Άμεση Euler	Πεπλεγμένη Euler	Τραπεζίου
50			
100			
150			
200			
250			