

## Euler - 2ο Εργαστήριο

Για την αριθμητική επίλυση ενός προβλήματος αρχικών τιμών (Π.Α.Τ.)

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad t \in [a, b], \quad y(0) = y_0$$

θεωρήσαμε τη μέθοδο του Euler. Έστω ένας ομοιόμορφος διαμερισμός του  $[a, b]$ , στα σημεία  $t_n = a + nh$ ,

$n = 0, \dots, N$ , με βήμα  $h = \frac{b-a}{N}$ , υπολογίζουμε τις τιμές  $y_n$  που αποτελούν προσεγγίσεις στις τιμές  $y(t_n)$ ,

$n = 0, \dots, N$ , όπου

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n), \quad n = 0, \dots, N-1.$$

**Άσκηση 1:** Έστω  $y(t) = e^{-\lambda t} + \sin(2t)$ , στο  $[0, 5]$  η οποία είναι λύση στο

$$y'(t) = -\lambda y(t) + 2 \cos(2t) + \lambda \sin(2t), \quad t \in [0, 5], \quad y(0) = 1.$$

Θεωρείστε ότι  $\lambda = 50$ . Για  $N = 50$ , κατασκευάστε τις προσεγγίσεις που δίνει η μέθοδος του Euler,

δημιουργείστε τη γραφική παράσταση της προσεγγιστικής λύσης και της ακριβούς στο διάστημα  $[0, 5]$ . Στη συνέχεια βρείτε το σφάλμα  $\max_{0 \leq n \leq N} |y_n - y(t_n)|$ . Επαναλάβετε για  $N = 500$ .

**Πειραματική εκτίμηση της τάξης σύγκλισης.** Γνωρίζουμε ότι για τη μέθοδο Euler το σφάλμα της μεθόδου ικανοποιεί

$$\max_{0 \leq n \leq N} |y_n - y(t_n)| \leq Ch^p$$

με  $p = 1$ .

Υπολογίζοντας το σφάλμα

$$err_N = \max_{0 \leq n \leq N} |y_n - y(t_n)|$$

για δύο διαφορετικές διαμερίσεις με  $N_1 < N_2$ , η πειραματική τάξη σύγκλισης ορίζεται ως

$$p = \frac{\ln\left(\frac{err_{N_2}}{err_{N_1}}\right)}{\ln\left(\frac{N_1}{N_2}\right)}$$

**Άσκηση 2:** Θεωρείστε τις διαμερίσεις του  $[0, 5]$ , με  $N = 10, 20, 30, \dots, 100$ . Υπολογίστε τα σφάλματα  $err_N$  και βρείτε τους λόγους που χρησιμοποιούμε για την πειραματική τάξη σύγκλισης της μεθόδου του Euler. Είναι  $p \approx 1$ ;

**Άσκηση 3:** Επαναλάβετε την προηγούμενη άσκηση αλλά τώρα θεωρείστε τις διαμερίσεις του  $[0, 5]$ , με  $N = 200, 220, 230, \dots, 300$ . Υπολογίστε τα σφάλματα  $err_N$  και βρείτε τους λόγους που χρησιμοποιούμε για την πειραματική τάξη σύγκλισης της μεθόδου του Euler. Είναι  $p \approx 1$ ;

## Μέθοδος Taylor (2)

Για την αριθμητική επίλυση ενός προβλήματος αρχικών τιμών (Π.Α.Τ.)

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad t \in [a, b], \quad y(0) = y_0$$

Έστω ένας ομοιόμορφος διαμερισμός του  $[a, b]$ , στα σημεία  $t_n = a + nh$ ,  $n = 0, \dots, N$ , με βήμα

$h = \frac{b-a}{N}$ . Θεωρήσαμε τη μέθοδο Taylor (2) όπου υπολογίζουμε τις τιμές  $y_n$  που αποτελούν προσεγγίσεις

στις τιμές  $y(t_n)$ ,  $n = 0, \dots, N$ , σύμφωνα με

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n) + \frac{h^2}{2} g(t_n, y_n), \quad n = 0, \dots, N-1,$$

όπου  $g(t, y(t)) = \frac{d}{dt} f(t, y(t))$ .

**Άσκηση 4:** Έστω  $y(t) = e^{-\lambda t} + \sin(2t)$ , στο  $[0, 5]$  η οποία είναι λύση στο

$$y'(t) = -\lambda y(t) + 2 \cos(2t) + \lambda \sin(2t), \quad t \in [0, 5], \quad y(0) = 1.$$

Θεωρείστε ότι  $\lambda = 50$ .

- Για  $N = 50$ , κατασκευάστε τις προσεγγίσεις που δίνει η μέθοδος του Taylor (2), δημιουργήστε τη γραφική παράσταση της προσεγγιστικής λύσης και της ακριβούς στο διάστημα  $[0, 5]$ . Στη συνέχεια βρείτε το σφάλμα  $\max_{0 \leq n \leq N} |y_n - y(t_n)|$  και συγκρίνεται με το αντίστοιχο σφάλμα για τη μέθοδο του Euler.
- Θεωρείστε τις διαμερίσεις του  $[0, 5]$ , με  $N = 10, 20, 30, \dots, 100$ . Υπολογίστε τα σφάλματα  $err_N$  και βρείτε τους λόγους που χρησιμοποιούμε για την πειραματική τάξη σύγκλισης της μεθόδου του Taylor (2). Είναι  $p \approx 2$ ; Συγκρίνετε τα σφάλματα με τα αντίστοιχα για τη μέθοδο Euler.
- Επαναλάβετε για  $N = 200, 210, \dots, 300$ .

## Συστήματα Διαφορικών εξισώσεων

Θεωρούμε τώρα το ακόλουθο σύστημα διαφορικών εξισώσεων

$$x'(t) = -y(t), \quad y'(t) = x(t), \quad t \in [0, 2\pi], \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 0$$

Η ακριβή λύση είναι απλό να δούμε ότι είναι  $x(t) = \cos(t)$ ,  $y(t) = \sin(t)$ .

**Άσκηση 5:** Θεωρείστε μια διαμέριση του  $[0, 2\pi]$ , με  $N = 100$  και εφαρμόστε τη μέθοδο του Euler για συστήματα για να βρείτε τις προσεγγίσεις  $(x_n, y_n)$  των  $(x(t_n), y(t_n))$ ,  $n = 0, \dots, N$ .

- Δημιουργήστε τη γραφική παράσταση των λύσεων ως προς το χρόνο  $t$ .
- Επειδή  $x(t)^2 + y(t)^2 = 1$ , δημιουργήστε τη γραφική παράσταση ανάμεσα στις  $(x(t), y(t))$ . Παρατηρήστε ότι είναι κύκλος στο πεδίο  $xy$ .
- Βρείτε το  $\max_{0 \leq n \leq N} (x_n^2 + y_n^2)$ . Ισχύει  $x_n^2 + y_n^2 = 1$ ; Στη συνέχεια δημιουργήστε τη γραφική παράσταση των 2 προσεγγίσεων  $(x_n, y_n)$  στο πεδίο  $xy$ . Δημιουργήστε έναν κύκλο;