7ο Εργαστήριο

Για την αριθμητική επίλυση ενός προβλήματος αρχικών τιμών (Π.Α.Τ.)

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad t \in [a, b], \quad y(0) = y_0$$

θεωρήσαμε πεπλεγμένες μονοβηματικές μεθόδους όπως του Euler και του τραπεζίου, αλλά και 2-βηματικές όπως η Adams Moulton (2) και η BDF2. Έστω ένας ομοιόμορφος διαμερισμός του $[a, b]$, στα σημεία $t_n = a + nh, n = 0, \ldots, N$, με βήμα $h = \dfrac{b-a}{N}$, υπολογίζουμε τις τιμές y_n που αποτελούν προσεγγίσεις στις τιμές $y(t_n)$, $n = 0, \ldots, N$

Πεπλεγμένη Euler

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_{n+1}, y_{n+1}), \quad n = 0, \ldots, N-1.$$

Μέθοδος του τραπεζίου

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f(t_{n+1}, y_{n+1}) + f(t_n, y_n)), \quad n = 0, \ldots, N-1.$$

Μέθοδος Adams Multon(2) Για δοσμένα y_0, y_1,

$$y_{n+2} = y_{n+1} + h(\frac{5}{12}f(t_{n+2}, y_{n+2}) + \frac{2}{3}f(t_{n+1}, y_{n+1}) - \frac{1}{12}f(t_n, y_n)), \quad n = 0, \ldots, N-2.$$

Μέθοδος BDF(2) Για δοσμένα y_0, y_1,

$$y_{n+2} - \frac{4}{3}y_{n+1} + \frac{1}{3}y_n = \frac{2}{3}hf(t_{n+2}, y_{n+2}), \quad n = 0, \ldots, N-2.$$

Μη γραμμική f ως προς y

Αν η συνάρτηση f είναι μη γραμμική ως προς y, π.χ. $f(t, y) = \dfrac{1}{1+t^2} - 2(y)^2$, τότε για να εφαρμόσουμε μια πεπλεγμένη μεθόδο, πρέπει να λύσουμε μια μη γραμμικής εξίσωσης χρησιμοποιώντας π.χ. τη μέθοδος του σταθερού σημείου (το είδαμε σε προηγούμενο εργαστήριο).

Μέθοδοι Πρόβλεψης - Διόρθωσης

Ένας άλλος τρόπος είναι θεωρήσουμε μια άλλη άμεση μέθοδο για να τη χρησιμοποιήσουμε ως μέθοδο πρόβλεψης της λύσης, μια πεπλεγμένη μεθοδο. Π.χ. το ζευγάρι Άμεση Euler - Πεπλεγμένη Euler, σε αυτή τη περίπτωση η μέθοδος παίρνει τη μορφή:

Άμεση Euler - Πεπλεγμένη Euler

$$\begin{aligned} &(\Pi\rho\acute{o}\beta\lambda\varepsilon\psi\eta) \qquad \tilde{y}_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n) \\ &(\Delta\iota\acute{o}\rho\theta\omega\sigma\eta) \qquad y_{n+1} = y_n + hf(t_{n+1}, \tilde{y}_{n+1}) \end{aligned}$$

Ένα άλλο ζευγάρι που μπορούμε να θεωρήσουμε είναι το Άμεση Euler - Μέθοδος Τραπεζίου

Άμεση Euler - Μέθοδος Τραπεζίου

$$\begin{aligned} &(\Pi\rho\acute{o}\beta\lambda\varepsilon\psi\eta) \qquad \tilde{y}_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n) \\ &(\Delta\iota\acute{o}\rho\theta\omega\sigma\eta) \qquad y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\big(f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, \tilde{y}_{n+1})\big) \end{aligned}$$

Ένα άλλο ζευγάρι που μπορούμε να θεωρήσουμε είναι το Άμεση Euler - Μέθοδος BDF(2)

Άμεση Euler - Μέθοδος BDF(2)

$$\begin{aligned} &(\Pi\rho\acute{o}\beta\lambda\varepsilon\psi\eta) \qquad \tilde{y}_{n+2} = y_{n+1} + hf(t_{n+1}, y_{n+1}) \\ &(\Delta\iota\acute{o}\rho\theta\omega\sigma\eta) \qquad y_{n+2} = \frac{4}{3}y_{n+1} - \frac{1}{3}y_n + \frac{2}{3}hf(t_{n+2}, \tilde{y}_{n+2}) \end{aligned}$$

Παρατήρηση: Πρέπει να προσέξουμε εδώ ότι η Άμεση Euler είναι μονοβηματική και η BDF2 είναι διβηματική. Αφού θέλουμε να προβλέψουμε μια προσέγγιση της y_{n+2} για να τη χρησιμοποιήσουμε στο τύπο της BDF2, τότε στην εφαρμογή της Άμεσης Euler, πρέπει να κανουμε το βήμα από το t_{n+1} στο t_{n+2}.

Οι μέθοδοι που συνδυάζουμε δεν είναι αναγκαστικά της ίδιας τάξης ακρίβειας.

Άσκηση 1: Έστω $y(t) = (t^2+1)^2$, στο $[0, 2]$ η οποία είναι λύση στο

$$y'(t) = 4t(y(t))^{1/2}, \quad t \in [0, 2], \quad y(0) = 1.$$

Θεωρείστε τη μέθοδο του Τραπεζίου και τη μέθοδο πρόβλεψης διόρθωσης Άμεση Euler - Τραπεζίου. Θεωρήστε ένα διαμερισμό του $[0, 2]$ σε $N+1$ σημεία, και για να υλοποιήσετε αυτές τις δύο μεθόδους χρησιμοποιήστε την αρχική τιμή $y_0 = 1$.
Βρείτε το σφάλμα $\max_{0 \le n \le N} |y_n - y(t_n)|$, για $N = 20, 40, 80, 160$ καθώς και την προσεγγιστική τάξη σύγκλισης p.
Παρατήρηση: Η τάξη 2 διατηρείται, διότι η Euler έχει τάξη κατά ένα λιγότερο.

Παρατήρηση: Μπορούμε να συνδυάσουμε μια μονοβηματική μέθοδο προβλεψης (Euler) με μια διβηματική μέθοδο διόρθωσης. Προσοχή το βήμα διόρθωσης θα πρέπει να είναι t_n και t_{n+1} στο t_{n+2}, ενώ το βήμα πρόβλεψης t_{n+1} στο t_{n+2}.

In [ ]:

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
def f1(t,y):
    s=(1-2*t)*y
    return s
def y_exact1(t):
    w=0.25-(t-0.5)**2
    s=np.exp(w)
    return s
def g(t):
    s=(1-2*t)
    return s
def f(t,y):
    s=4*t*y**(1/2)
    return s

def y_exact(t):
    s=(t**2+1)**2
    return s


N=[20,40,80,160,320]

### Προβλεψη Διόρθωση

err=np.zeros(len(N))
for j in range(len(N)):
    t=np.linspace(0,2,N[j]+1)
    h=t[1]-t[0]



    y=np.zeros(N[j]+1)
    y[0]=1
    for i in range(N[j]):
    ## Προβλεψη Αμεση Euler
        y_pred=y[i]+h*f(t[i],y[i])

    #Διόρθωση Τραπεζιου
        y[i+1]=y[i]+(h/2)*(f(t[i],y[i])+f(t[i+1],y_pred))


    err[j]=max(y_exact(t)-y)
    print(err[j])

print('Pred-Corr')
for i in range(len(N)-1):
    print(np.log(err[i+1]/err[i])/np.log(N[i]/N[i+1]))
```

Παρατήρηση: Μπορούμε να συνδυάσουμε μια μονοβηματική μέθοδο προβλεψης (Euler) με μια διβηματική μέθοδο διόρθωσης. Προσοχή το βήμα διόρθωσης θα πρέπει να είναι t_n και t_{n+1} στο t_{n+2}, ενώ το βήμα πρόβλεψης t_{n+1} στο t_{n+2}.

Άσκηση 2: Επαναλάβετε την παραπάνω άσκηση για τις μεθόδους Πρόβλεψης - Διόρθωσης, Άμεση Euler - Μέθοδος AM(2) και Άμεση Euler - Μέθοδος BDF(2). Για να υλοποιήσετε αυτές τις δύο μεθόδους χρησιμοποιήστε τις αρχικές τιμές $y_0 = 1$ και y_1 να δίνεται από την άμεση μέθοδο του Euler.
Βρείτε το σφάλμα $\max_{0 \le n \le N} |y_n - y(t_n)|$, για $N = 20, 40, 80, 160$ καθώς και την προσεγγιστική τάξη σύγκλισης p.

Άσκηση 3: Για το παραπάνω πρόβλημα αρχικών τιμών χρησιμοποιήστε την άμεση μέθοδο

$$y_{n+2} + 4y_{n+1} - 5y_n = h(4f(t_{n+1}, y_{n+1}) + 2f(t_n, y_n))$$

όπου θεωρήστε τις αρχικές τιμές $y_0 = 1$ και $y_1 = (h^2+1)^2$. Βρείτε το σφάλμα $\max_{0 \le n \le N} |y_n - y(t_n)|$, για $N = 20, 40, 80, 160$. Στη συνέχεια επαναλάβετε για τη μέθοδο Πρόβλεψης - Διόρθωσης

$$\begin{aligned} &(\Pi\rho\acute{o}\beta\lambda\varepsilon\psi\eta) \qquad \tilde{y}_{n+2} = -4y_{n+1} + 5y_n + h(4f(t_{n+1}, y_{n+1}) + 2f(t_n, y_n)) \\ &(\Delta\iota\acute{o}\rho\theta\omega\sigma\eta) \qquad y_{n+2} = \frac{4}{3}y_{n+1} - \frac{1}{3}y_n + \frac{2}{3}hf(t_{n+2}, \tilde{y}_{n+2}) \end{aligned}$$

Βρείτε το σφάλμα $\max_{0 \le n \le N} |y_n - y(t_n)|$, για $N = 20, 40, 80, 160$ καθώς και την προσεγγιστική τάξη σύγκλισης p. Για να την υλοποιήσετε χρησιμοποιήστε τις αρχικές τιμές $y_0 = 1$ και $y_1 = (h^2+1)^2$.
Παρατήρηση: Μπορούμε να συνδυάσουμε μια μη ευσταθή μέθοδο προβλεψης με μια ευσταθή μέθοδο διόρθωσης.

Άσκηση 4: Επαναλάβετε το για το προηγούμενο προβλημα αρχικών τιμών τη μέθοδο προβλεψης - διόρθωσης

$$\begin{aligned} &(\Pi\rho\acute{o}\beta\lambda\varepsilon\psi\eta\ (\mu\acute{\varepsilon}\theta o\delta o\varsigma\ \text{Euler})) \qquad \tilde{y}_{n+2} = y_{n+1} + hf(t_{n+1}, y_{n+1}) \\ &(\Delta\iota\acute{o}\rho\theta\omega\sigma\eta\ (\mu\acute{\varepsilon}\theta o\delta o\varsigma\ \text{Simpson})) \qquad y_{n+2} = y_n + \frac{h}{3}(f(t_{n+2}, \tilde{y}_{n+2}) + 4f(t_{n+1}, y_{n+1}) + f(t_n, y_n)) \end{aligned}$$

Στη συνέχεια επαναλάβετε για τη μέθοδο Πρόβλεψης - Διόρθωσης

$$\begin{aligned} &(\Pi\rho\acute{o}\beta\lambda\varepsilon\psi\eta) \qquad \tilde{y}_{n+2} = -4y_{n+1} + 5y_n + h(4f(t_{n+1}, y_{n+1}) + 2f(t_n, y_n)) \\ &(\Delta\iota\acute{o}\rho\theta\omega\sigma\eta\ (\mu\acute{\varepsilon}\theta o\delta o\varsigma\ \text{Simpson})) \qquad y_{n+2} = y_n + \frac{h}{3}(f(t_{n+2}, \tilde{y}_{n+2}) + 4f(t_{n+1}, y_{n+1}) + f(t_n, y_n)) \end{aligned}$$

Βρείτε το σφάλμα $\max_{0 \le n \le N} |y_n - y(t_n)|$, για $N = 20, 40, 80, 160$ καθώς και την προσεγγιστική τάξη σύγκλισης p. Για να την υλοποιήσετε χρησιμοποιήστε τις αρχικές τιμές $y_0 = 1$ και $y_1 = (h^2+1)^2$
Παρατήρηση: Η διαφορά της τάξης ακρίβειας των 2 μεθόδων που χρησιμοποιούμε δεν πρέπει να είναι μεγαλύτερη από ένα (1). Η άμεση Euler έχει τάξη ακρίβειας 1 και η Simpson 4. Επίσης μπορούμε να χρησιμοποιησουμε μια μη ευσταθή μέθοδο για πρόβλεψη με υψηλή τάξη ακρίβειας και να πάρουμε σύγκλιση της μεθόδου προβλεψης - διόρθωσης με υψηλή τάξη ακριβείας (στο παράδειγμα ταξη 4))

Συστήματα Διαφορικών εξισώσεων

Θεωρούμε τώρα το ακόλουθο σύστημα διαφορικών εξισώσεων

$$x'(t) = \frac{5}{100}x(t)(1 - \frac{1}{100}y(t)), \quad y'(t) = \frac{1}{10}y(t)(\frac{5}{1000}x(t) - 2),\ t \in [0, 150], x(0) = 500,\ y(0) = 100$$

Αυτό είναι ένα σύστημα που περιγράφει τη εξέλιξη του πλυθυσμού λαγών και αλεπούδων, όπου $x(t)$ είναι ο πλυθυσμός των λαγών και $y(t)$ των αλεπούδων.

Άσκηση 5: Θεωρείστε το παραπάνω σύστημα Δ.Ε. και μια διαμέριση του $[0, 150]$, με $N = 100, 200, 400, 800$ και εφαρμόστε Πρόβλεψης - Διόρθωσης, Άμεση Euler - Μέθοδος AM(2) και Άμεση Euler - Μέθοδος BDF(2). Για να υλοποιήσετε αυτές τις δύο μεθόδους χρησιμοποιήστε τις αρχικές τιμές x_0, y_0 και για x_1, y_1 αυτές που δίνονται από την άμεση μέθοδο του Euler για συστήματα για να βρείτε τις προσεγγίσεις (x_n, y_n) των $(x(t_n), y(t_n)), n = 0, \ldots, N$.

1. Δημιουργείστε τη γραφική παράσταση των λύσεων ως προς το χρόνο t.
2. Δημιουργείστε τη γραφική παράσταση των 2 προσεγγίσεων (x_n, y_n) στο πεδίο xy.
3. Ποιός είναι ο πλυθυσμός των λαγών και των αλεπούδων για χρόνο $t = 150$;

In [ ]:

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
def f1(t,x,y):
    return (0.05)*x*(1-0.01*y)
def f2(t,x,y):
    return (0.1)*y*(0.005*x-2)


N=100

t=np.linspace(0,150,N+1)
h=t[1]-t[0]

x=np.zeros(N+1)
y=np.zeros(N+1)

x[0]=500
y[0]=100
x[1]=x[0]+h*f1(t[0],x[0],y[0])
y[1]=y[0]+h*f2(t[0],x[0],y[0])

for i in range(N-1):
    ### Αμεση Euler
    x_pred=x[i+1]+h*f1(t[i+1],x[i+1],y[i+1])
    y_pred=y[i+1]+h*f2(t[i+1],x[i+1],y[i+1])


     #Διόρθωση AM2
    y[i+2]=y[i+1]+(h)*((5/12)*f2(t[i+2],x_pred,y_pred)+(2/3)*f2(t[i+1],x[i+1],y[i+1])-(1/12)*f2(t[i],x[i],y[i]))
    x[i+2]=x[i+1]+(h)*((5/12)*f1(t[i+2],x_pred,y_pred)+(2/3)*f1(t[i+1],x[i+1],y[i+1])-(1/12)*f1(t[i],x[i],y[i]))



### Γραφική παρασταση των 2 συναρτήσεων
plt.plot(t,x,t,y)
plt.show()

### Γραφική παράσταση xy-επιπεδο
plt.plot(x,y)
plt.show()

## Πληθυσμός στο τελος
print(x[N],y[N])

### Οι ακριβείς  λύσεις είναι περιοδικές συναρτήσεις. Όσο μεγαλώνει ο αριθμός των σημείων N, το παρατηρουμε καλυτερα.
```