8ο Εργαστήριο - Συστήματα Δ.Ε.

Για την αριθμητική επίλυση ενός προβλήματος αρχικών τιμών (Π.Α.Τ.)

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad t \in [a, b], \quad y(0) = y_0$$

θεωρήσαμε άμεσες και πεπλεγμένες μεθόδους όπως του Euler και του τραπεζίου, του μέσου, Adams Moulton (2), η BDF2 και άλλες. Αν οι συνάρτησεις y και f είναι διανυσματικές. Είδαμε ορισμένα παραδείγματα, όπως η εξέλιξη πλυθυσμών (π.χ. θήραμα-κυνηγός). Αν η Δ.Ε. είναι 2ης τάξεως π.χ.

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = f(t),$$

τότε μπορούμε να βρούμε τη λύση της χρησιμοποιώντας μεθόδους που μελετήσαμε για πρώτης τάξεως διαφορικές εξισώσεις. Δευτερης τάξεως Δ.Ε. Η κίνηση ενός εκρεμμούς με βάρος m που κρέμεται από μια ράβδο μήκους l, περιγράφεται από την παρακάτω Δ.Ε., όπου $\theta \in (0, \pi/2)$ συμβολίζουμε τη γωνία που σχηματίζει η ράβδος με την κάθετο από το σημείο στήριξης,

$$ml\frac{d^2\theta(t)}{dt} = -mg\sin(\theta(t)),$$

και g η επιτάχυνση της βαρύτητας. Για να λύσουμε αυτό το πρόβλημα μοναδικά χρειαζόμαστε την αρχική μετατόπιση $\theta(0)$ και την αρχική ταχύτητα $\theta'(0)$. Αν θεωρήσουμε ότι

$$x(t) = \theta(t) \ \kappa\alpha\iota \ y(t) = \theta'(t)$$

τότε οδηγούμαστε στο σύστημα

$$\begin{aligned} x'(t) &= y(t) \\ y'(t) &= -\frac{g}{l}\sin(x(t)), \end{aligned}$$

και $x(0) = \theta(0)$, $y(0) = \theta'(0)$
Παρατήρηση: Στην περίπτωση που η γωνία $\theta(t)$ είναι μικρή τότε $\sin\theta$ περίπου ίση θ και η διαφορική εξίσωση θα πάρει τη μορφή

$$ml\frac{d^2\theta(t)}{dt} = -mg\theta(t).$$

Τότε η περίοδος της κίνησης είναι $T = 2\pi\sqrt{l/g}$.

Άσκηση 1: θεωρήστε την άμεση μέθοδο του Euler για τη λύση του παραπάνω προβλήματος. Θεωρήστε ότι το εκρεμές έχει μήκος $l = 1$, η επιταχυνση της βαρύτητας είναι $g = 10$, αρχικά έχει μετατοπιστεί κατά 5 μοίρες και το αφήνουμε (η αρχική ταχύτητα είναι 0). Βρείτε τη μετατόπιση του από τον κάθετο άξονα για $T = 2\pi\sqrt{l/g}$ αν θεωρείστε έναν διαμερισμό με $N = 100$. Δημιουργήστε το γράφημα της προσεγγιστικής λύσης $\theta(t)$. Επανέρχεται το σώμα στην αρχική θέση για $t = T$; Ποιά είναι η διαφορά $|\theta(0) - \theta(T)|$. Επαναλάβετε για διαμερισμους με $N = 200, 400, 800$. Η 1 μοίρα είναι ίση με $\dfrac{\pi}{180}$.

Άσκηση 2: Επαναλάβετε την Άσκηση 1 για τη πεπλεγμένη μέθοδο του Euler και τη μέθοδο του τραπεζίου. Επιλέξε εσείς ένα μέγιστο αριθμό επαναλήψεων Nmax και tol σε κάθε χρονικό βήμα t_n.

Άσκηση 3: Επαναλάβετε την Άσκηση 1 για τη μέθοδο του μέσου, τις μεθόδους BDF2 και AM2. Για δοσμένα y_0, y_1, **Μέθοδος Μέσου**

$$y_{n+2} = y_n + 2hf(t_{n+1}, y_{n+1}), \quad n = 0, \dots, N-2$$

Μέθοδος Adams Multon(2)

$$y_{n+2} = y_{n+1} + h(\frac{5}{12}f(t_{n+2}, y_{n+2}) + \frac{2}{3}f(t_{n+1}, y_{n+1}) - \frac{1}{12}f(t_n, y_n)), \quad n = 0, \dots, N -$$

Μέθοδος BDF(2) Για δοσμένα y_0, y_1,

$$y_{n+2} - \frac{4}{3}y_{n+1} + \frac{1}{3}y_n = \frac{2}{3}hf(t_{n+2}, y_{n+2}), \quad n = 0, \dots, N-2.$$

και για πρώτη προσέγγιση χρησιμοποιήστε την άμεση μέθοδο του Euler.

Άσκηση 4: Επαναλάβετε την άσκηση 1 για τη μέθοδο πρόβλεψης-διόρθωσης, Euler-Τραπεζίου.

Άμεση Euler - Μέθοδος Τραπεζίου

$$\begin{aligned} &(\Pi\rho\acute{o}\beta\lambda\varepsilon\psi\eta) \qquad \tilde{y}_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n) \\ &(\Delta\iota\acute{o}\rho\theta\omega\sigma\eta) \qquad y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left(f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, \tilde{y}_{n+1})\right) \end{aligned}$$

Αν η κίνηση του εκρεμούς διαφοροποιηθεί ως εξης: $\theta(0)$ γίνει 60 μοίρες, τότε θα επιστρέψει στην αρχική θέση σε κάποιο άλλο χρόνο, αλλά η μέγιστη γωνία δεν θα είναι μεγαλύτερη από την αρχική των 60 μοιρών.

Στο διάνυσμα της προσεγγιστικής λύσης της θ βρείτε τη μέγιστη τιμή και συγκρίνετε την με την αρχική τιμή της γωνίας $\theta(0)$.

Άσκηση 5: Επαναλάβετε την Άσκηση 1 για τις παραπάνω μεθόδους με $\theta(0)$ τώρα 60 μοίρες, και βρείτε σε για ποιό t η θ γίνεται μέγιστη και τη διαφορά ανάμεσα στη μέγιστη τιμή της προσεγγιστικής λύσης και της αρχικής τιμής $\theta(0)$, για $\mathrm{N} = 100, 200, 400, 600$. Μπορείτε να θεωρήσετε μεγαλύτερο χρόνο από ότι πριν, γιατί ο χρόνος της περιόδου θα είναι μεγαλύτερος από $T = 2\pi\sqrt{l/g}$.