Εισαγωγή

Σ.Δ.Ε

π.χ. $x'(t) = \sin(t) - x(t)$

$$x(t) = Ae^{-t} + \frac{1}{2}\sin(t) - \frac{1}{2}\cos(t)$$

$A \in \mathbb{R}$

Προβλήματα αρχικών τιμών

Π.Α.Τ.

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & a \le t \le b \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

$$x'(t) = \sin(t) - x(t)$$
$$= f(t, x(t)), \quad f(t,s) = \sin(t) - s$$

$$x'(t) = \sin(t) - 0.1\, x^3(t)$$

Η λυση $x(t)$ δεν μπορεί να εκφραστεί σε κλειστή μορφή

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & a \le t \le b \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

$f(t,s)$: γραμμική συνάρτηση ως προς τη μεταβλητή s

$$f(t,s) = \sin(t) - s$$

ή $f(t,s) = p(t)\,s + q(t)$, p, q συνεχείς συναρτ.

$$y'(t) = p(t)\, y(t) + q(t), \quad p, q$$

συνεχείς συναρτήσεις

Κάτω από προϋποθέσεις

$$y(t) = e^{\int_a^t p(s)\,ds} \left[y(a) + \int_a^t q(s)\, e^{-\int_a^s p(\tau)\,d\tau} \, ds \right]$$

$$g(t) = e^{-\int_a^t p(s)\,ds}$$

ολοκληρωτικός παράγοντας

$$y'(t) + \frac{2}{1+t^4}\, y(t) = \sin(t)$$

$y(t)$ μπορεί να "λυθεί"

$$g(t) = e^{-\int_0^t \frac{2}{1+s^4}\, ds}$$

$$= \left(\frac{\exp\left(2 \tan^{-1}(1+\sqrt{2}\,t)\right)}{\exp\left(2 \tan^{-1}(1-\sqrt{2}\,t)\right)} \cdot \frac{t^2+\sqrt{2}\; t + 1}{t^2-\sqrt{2}\; t + 1} \right)^{\frac{1}{2\sqrt{2}}}$$

Για να δοθεί ο τύπος κλειστή μορφή της ακριβούς λύσης πρέπει

$$\int_0^t \left(\sin(s) / g(s) \right) ds$$

Θα μελετησουμε μεθοδους
για τη λυση προβληματων αρχικων τιμων

Δεν θα "υπολογισουμε" ~ "βρουμε"
τη λυση Δ.Ε (γενικη)

$$\begin{cases} y(a) = y_0 \\ y' = f(t, y(t)) \end{cases}$$

Ποια ειναι η λυση $\underline{\underline{y(t)}}$

Θεωρούμε το πρόβλημα αρχικών τιμών
έχει μοναδική λύση

$$\begin{cases} y'(t) = f(t) & a \le t \le b \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

- Έχει μοναδική λύση στο $[a,b]$
- Έχει μοναδική λύση στο $[a,c]$, $c<b$

Μπορεί η $y(t)$ να είναι μοναδική

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(a) = y_0 \end{cases} \qquad \underline{\underline{a \leq t}}$$

Πάντα θα θεωρούμε ένα $[a, b)$

Θα αναζητούμε τη λύση $y(t)$

"λύση" — "προσέγγιση" της $y(t)$

$$f(t,s) : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

Enions $$f(t,\vec{v}) : [a,b] \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$$

Π.Α.Τ.

$u : [a,b) \to \mathbb{R}$, $v : [a,b] \to \mathbb{R}$.

$$u'(t) = p(t, u(t), v(t)) \qquad u(a) = \eta_0$$
$$v'(t) = q(t, u(t), v(t)) \qquad v(a) = \eta_1$$

Σύστημα Δ.Ε

$u(t)$ # αριθμός κουνελιών.

$v(t)$ # -"- αλεπούδες

$$u'(t) = \frac{5}{100}u(t)\left(1 - \frac{1}{100}v(t)\right)$$

$$v'(t) = \frac{1}{10}v(t)\left(\frac{5}{1000}u(t) - 2\right)$$

$u(t)$ # αριθμός κουνελιών.

$v(t)$ # -"- αλεπούδες

$$u'(t) = \frac{5}{100} u(t) \left(1 - \frac{1}{100} v(t)\right)$$

$$v'(t) = \frac{1}{10} v(t) \left(\frac{5}{1000} u(t) - 2\right)$$

$H(t)$: # ανθρωποι

$Z(t)$: # Ζομπι

$R(t)$: # Νεκρων Ζομπι

Σταθερες του μοντελου

α : αντιστοιχια που δειχνει το γεγονος
του θανατου των ζομπι
στις "επαφες" ανθρωπων - ζομπι

β : αντιστοιχης "επαφη" ανθρωπου - ζομπι
οι ανθρωποι γινονται ζομπι

γ : συντελεστής δείχνει τα ζόμπι
που ξαναγεννιούνται.

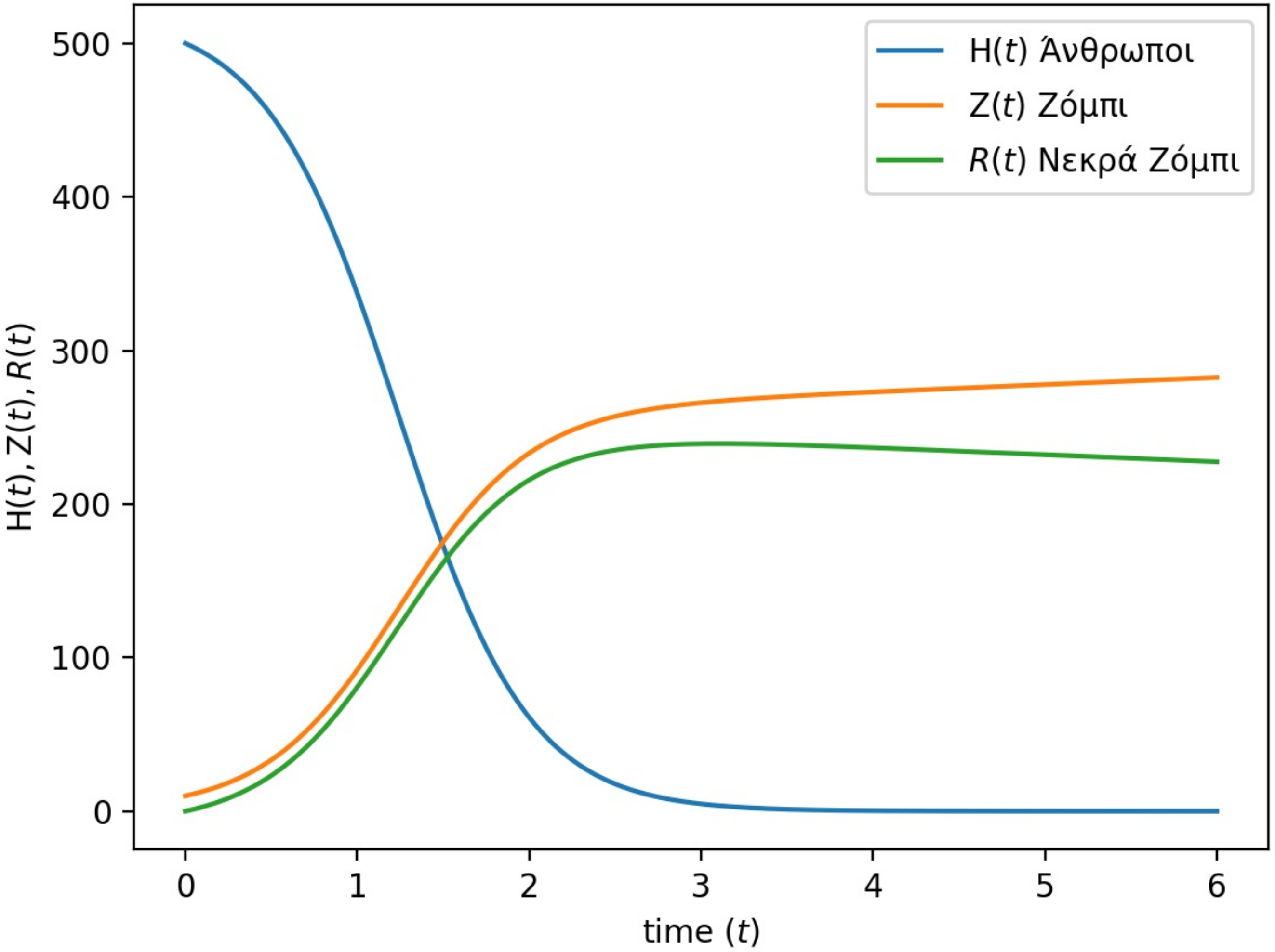
$$H'(t) = -\beta H(t) Z(t)$$

$$Z'(t) = \beta H(t) Z(t) - \alpha H(t) Z(t) + \gamma R(t)$$

$$R'(t) = \alpha H(t) Z(t) - \gamma R(t)$$

$\alpha = 0.005$, $\beta = 0.01$, $\gamma = 0.02$

$H(0) = 500$, $Z(0) = 10$, $R(0) = 0$



H(t) Άνθρωποι
Z(t) Ζόμπι
R(t) Νεκρά Ζόμπι
500
400
300
200
100
0
H(t), Z(t), R(t)
0
1
2
3
4
5
6
time (t)