Πεπλεγμένη μέθοδος του Euler

$$(*) \quad \begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & t \in [a,b] \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

f ικανοποιεί τη μονόπλευρη συνθήκη του Lipschitz

$$(f(t,y_1) - f(t,y_2))(y_1 - y_2) \leq 0$$

<u>Θεώρημα</u>: Θεωρούμε το ΠΑΤ $(*)$ και ότι η f ικανοποιεί τη μονόπλευρη συνθήκη του Lipschitz. Αν y_n, $n=0,\dots,N$ είναι οι προσεγγίσεις με τη πεπλεγμένη μέθοδο του Euler, $t_n = a+nh$, $h = \frac{b-a}{N}$, $n=0,1,\dots,N$ τότε

$$\max_{0 \leq n \leq N} |y(t_n) - y_n| \leq \frac{b-a}{2} M \cdot h, \quad M = \max_{a \leq t \leq b} |y''(t)|$$

Πεπλεγμένη μέθοδος του Euler

$$(*)\quad \begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & t \in [a,b] \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

f ικανοποιεί τη μονόπλευρη συνθήκη του Lipschitz

$$\big(f(t,y_1) - f(t,y_2)\big)(y_1 - y_2) \leq 0$$

Θεώρημα: Θεωρούμε το ΠΑΤ $(*)$ και ότι η f ικανοποιεί τη μονόπλευρη συνθήκη του Lipschitz. Αν y_n, $n=0,\dots,N$ είναι οι προσεγγίσεις με τη πεπλεγμένη μέθοδο του Euler, $t_n = a + nh$, $h = \frac{b-a}{N}$, $n = 0, 1, \dots, N$ τότε

$$\max_{0 \leq n \leq N} |y(t_n) - y_n| \leq \frac{b-a}{2} M \cdot h, \quad M = \max_{a \leq t \leq b} |y''(t)|$$

Απόδειξη: $\varepsilon_n = y(t_n) - y_n$

$$y(t_n) = y(t_{n+1}) + \underbrace{(t_n - t_{n+1})}_{-h} y'(t_{n+1}) + \frac{(t_n - t_{n+1})^2}{2} y''(\xi_n), \quad \xi_n \in [t_n, t_{n+1}]$$

$$\begin{cases} y(t_{n+1}) = y(t_n) + h\, f(t_{n+1}, y(t_{n+1})) - \frac{h^2}{2} y''(\xi_n) \\ y_{n+1} = y_n + h\, f(t_{n+1}, y_{n+1}) \end{cases}$$

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n + h\left[f(t_{n+1}, y(t_{n+1})) - f(t_{n+1}, y_{n+1})\right] - \frac{h^2}{2} y''(\xi_n)$$

$$\varepsilon_{n+1}^2 = \varepsilon_n \varepsilon_{n+1} + \underbrace{h\left[f(t_{n+1}, y(t_{n+1})) - f(t_{n+1}, y_{n+1})\right] \cdot \varepsilon_{n+1}}_{\leq 0} - \frac{h^2}{2} y''(\xi_n)\, \varepsilon_{n+1}$$

$$\leq \varepsilon_n \varepsilon_{n+1} - \frac{h^2}{2} y''(\xi_n)\, \varepsilon_{n+1}$$

Απόδειξη: $\varepsilon_n = y(t_n) - y_n$

$$y(t_n) = y(t_{n+1}) + \underbrace{(t_n - t_{n+1})}_{-h} y'(t_{n+1}) + \frac{(t_n - t_{n+1})^2}{2} y''(\xi_n), \quad \xi_n \in [t_n, t_{n+1}]$$

$$\begin{cases} y(t_{n+1}) = y(t_n) + h f(t_{n+1}, y(t_{n+1})) - \frac{h^2}{2} y''(\xi_n) \\ y_{n+1} = y_n + h f(t_{n+1}, y_{n+1}) \end{cases}$$

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n + h\left[f(t_{n+1}, y(t_{n+1})) - f(t_{n+1}, y_{n+1})\right] - \frac{h^2}{2} y''(\xi_n)$$

$$\varepsilon_{n+1}^2 = \varepsilon_n \varepsilon_{n+1} + \underbrace{h\left[f(t_{n+1}, y(t_{n+1})) - f(t_{n+1}, y_{n+1})\right] \cdot \varepsilon_{n+1}}_{\leq 0} - \frac{h^2}{2} y''(\xi_n) \varepsilon_{n+1}$$

$$\leq \varepsilon_n \varepsilon_{n+1} - \frac{h^2}{2} y''(\xi_n) \varepsilon_{n+1}$$

Απόδειξη: $\varepsilon_n = y(t_n) - y_n$

$$y(t_n) = y(t_{n+1}) + \underbrace{(t_n - t_{n+1})}_{-h}\, y'(t_{n+1}) + \frac{(t_n - t_{n+1})^2}{2}\, y''(\xi_n), \quad \xi_n \in [t_n, t_{n+1}]$$

$$\begin{cases} y(t_{n+1}) = y(t_n) + h\, f(t_{n+1}, y(t_{n+1})) - \frac{h^2}{2}\, y''(\xi_n) \\ y_{n+1} = y_n + h\, f(t_{n+1}, y_{n+1}) \end{cases}$$

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n + h\left[f(t_{n+1}, y(t_{n+1})) - f(t_{n+1}, y_{n+1})\right] - \frac{h^2}{2}\, y''(\xi_n)$$

$$\varepsilon_{n+1}^2 = \varepsilon_n \varepsilon_{n+1} + \underbrace{h\left[f(t_{n+1}, y(t_{n+1})) - f(t_{n+1}, y_{n+1})\right] \cdot \varepsilon_{n+1}}_{\leq 0} - \frac{h^2}{2}\, y''(\xi_n)\, \varepsilon_{n+1}$$

$$\leq \varepsilon_n \varepsilon_{n+1} - \frac{h^2}{2}\, y''(\xi_n)\, \varepsilon_{n+1}$$

$$|\varepsilon_{n+1}|^2 \le |\varepsilon_n||\varepsilon_{n+1}| + \frac{h^2}{2} M |\varepsilon_{n+1}|$$

ή $$|\varepsilon_{n+1}| \le |\varepsilon_n| + \frac{h^2}{2} M \le \cancelto{0}{|\varepsilon_0|} + (n+1)\frac{h^2}{2} M .$$

Άρα $$|\varepsilon_n| \le n \cdot \frac{h^2}{2} M = (t_n - a) \cdot \frac{h M}{2} \le \frac{(b-a)}{2} M \cdot h .$$