Άμεσες μέθοδοι

Π.Α.Τ. $\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(a) = y_0 \end{cases}$ $t \in [a, b]$.

$t_n = a + nh$, $h = \frac{b-a}{N}$

$$y'(t_n) = f(t_n, y(t_n))$$

$$y'(t_n) \approx \frac{y(t_{n+1}) - y(t_n)}{t_{n+1} - t_n} = \frac{y(t_{n+1}) - y(t_n)}{h}$$

$\Rightarrow$ Άμεση μέθοδο του Euler, Άμεση

$$\boxed{\frac{y_{n+1} - y_n}{h} = f(t_n, y_n)}$$

$$y'(t_{n+1}) = f(t_{n+1}, y(t_{n+1}))$$

$$y'(t_{n+1}) \simeq \frac{y(t_{n+1}) - y(t_n)}{t_{n+1} - t_n} = \frac{y(t_{n+1}) - y(t_n)}{h}$$

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} = f(t_{n+1}, y_{n+1})$$

Πεπλεγμένη μέθοδος του Euler

$$y'(t) = f(t, y(t)) \quad , \quad t \in [a, b]$$

Ολοκληρώνουμε τη σχέση στο $[t_n, t_{n+1}]$

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} y'(t)\,dt = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t))\,dt$$

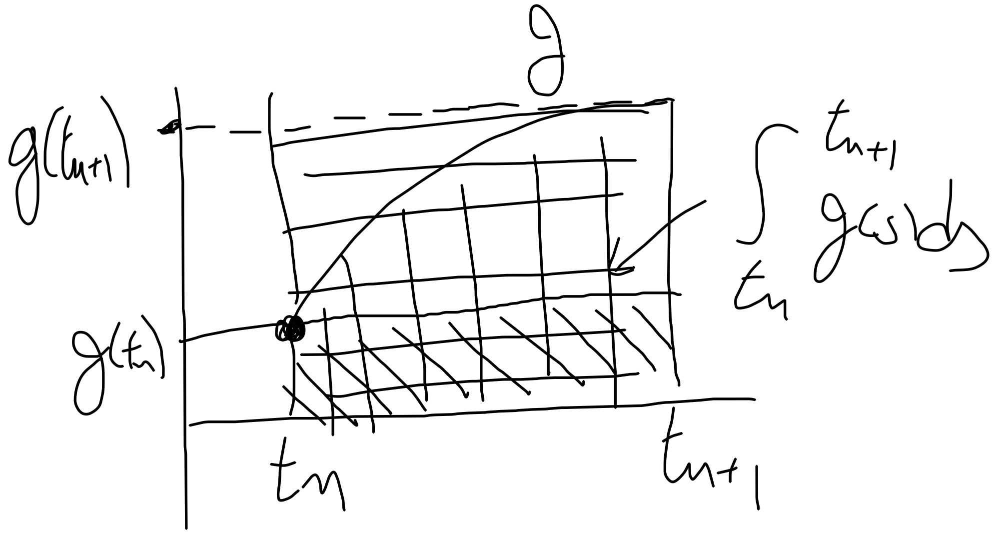
$$y(t_{n+1}) - y(t_n) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t))\,dt$$

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t))\,dt$$

Έστω $g : [t_n, t_{n+1}] \to \mathbb{R}$.

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} g(s)\,ds \approx g(t_n)(t_{n+1} - t_n)$$

$$\int_{t_{n+1}}^{t_n} g(s)\,ds \approx g(t_{n+1}) \cdot (t_{n+1} - t_n)$$



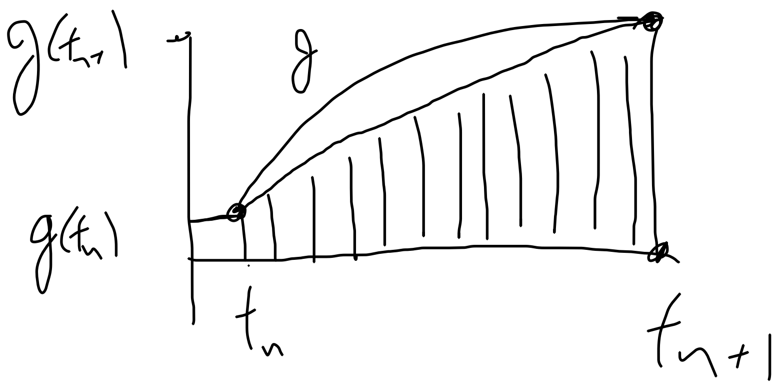
$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t))\,dt$$

$$\simeq y(t_n) + h f(t_n, y(t_n)) \Rightarrow$$ Άμεση μέθοδο Euler.

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t))\,dt$$

$$\simeq y(t_n) + h f(t_{n+1}, y(t_{n+1})) \Rightarrow$$ Πεπλεγμένη μέθοδο Euler

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} g(s)\,ds$$



$$\simeq \frac{1}{2}\left(g(t_n)+g(t_{n+1})\right)\cdot(t_{n+1}-t_n)$$ Κανόνας ολοκλήρωσης τραπεζίου.

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t,y(t))\,dt$$

$$\simeq y(t_n) + \frac{h}{2}\Big(f(t_n,y(t_n)) + f(t_{n+1},y(t_{n+1}))\Big)$$

Μέθοδος τραπεζίου.

Κατασκευάζουμε y_n, $n=0,1,2,\dots,N$.

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left(f(t_n,y_n) + f(t_{n+1},y_{n+1})\right)$$

Πεπλεγμένη μέθοδος.

- Ανάλογα βήματα με την πεπλεγμένη μέθοδο του Euler.

$y_n \longrightarrow y_{n+1}$ λύνουμε μη-γραμμικό (εύρεση σταθερού "σημείου")

$$x_{k+1} = y_n + \frac{h}{2}\left(f(t_n,y_n) + f(t_{n+1},x_k)\right), \quad k=0,1,2,\dots$$