Μεθοδο Τραπεζιου

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left(f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_{n+1}) \right)$$

- Τοπικό σφαλμα διακριτοποιησης
- Συγκλιση (f ικανοποιει "τοπικα" Lipschitz)

$$\left.\begin{array}{l} y(t_n) \\ \& \ y(t_{n+1}) \end{array}\right\} \longrightarrow \tilde{y} \approx y(t_{n+1})$$

$$\tilde{y} = y(t_n) + \frac{h}{2}\Big(f(t_n, y(t_n)) + f(t_{n+1}, y(t_{n+1}))\Big)$$

$$y(t_{n+1}) - \tilde{y} = y(t_{n+1}) - \left(y(t_n) + \frac{h}{2} f(t_n, y(t_n)) + f(t_{n+1}, y(t_{n+1}))\right)$$

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + h y'(t_n) + \frac{h^2}{2} y''(t_n) + \frac{h^3}{3!} y'''(\xi_n), \quad \xi_n \in [t_n, t_{n+1}]$$

$$y'(t_{n+1}) = y'(t_n) + h y''(t_n) + \frac{h^2}{2} y'''(\eta_n), \quad \eta_n \in [t_n, t_{n+1}]$$

$$y(t_{n+1}) - \left\{ y(t_n) + \frac{h}{2}\left(y'(t_n) + y'(t_{n+1}) \right) \right\}$$

$$= y(t_n) + h\,y'(t_n) + \frac{h^2}{2} y''(t_n) + \frac{h^3}{3!} y'''(\xi_n)$$

$$- \left\{ y(t_n) + \frac{h}{2} y'(t_n) + \frac{h}{2}\left(y'(t_n) + h\,y''(t_n) + \frac{h^2}{2} y'''(\eta_n) \right) \right\}$$

$$= h\,y'(t_n) - h\,y'(t_n) + \frac{h^2}{2} y''(t_n) - \frac{h^2}{2} y''(t_n) + \frac{h^3}{3!} y'''(\xi_n) - \frac{h^3}{4} y'''(\eta_n)$$

$$= O(h^3)$$

Θεώρημα: (Σύγκλιση μεθόδου τραπεζίου)

Αν f ικανοποιεί τη "ολική" συνθήκη του Lipschitz. Αν $y \in C^3[a,b]$ και $y'(t) = f(t, y(t))$, $t \in [a,b]$, $y(a) = y_0$. Επίσης $y_0, y_1, \ldots, y_N$ οι προσεγγίσεις που δίνει η μέθοδος του τραπεζίου

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left(f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_{n+1}) \right), \quad n = 0, \ldots, N-1$$

$h = \frac{b-a}{N}$, $t_n = a + nh$, $n = 0, \ldots, N$.

$$\max_{0 \le n \le N} |y(t_n) - y_n| \le C h^2$$

Απόδειξη:

Τοπικό σφάλμα τραπεζίου

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \frac{h}{2}\left(f(t_n, y(t_n)) + f(t_{n+1}, y(t_{n+1})\right) + \delta_n$$

$$\delta_n = O(h^3)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left(f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_{n+1})\right)$$

$$\varepsilon_n = y(t_n) - y_n, \quad n = 0, \dots, N$$

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n + \frac{h}{2}\left(f(t_n, y(t_n)) - f(t_n, y_n)\right) + \frac{h}{2}\left(f(t_{n+1}, y(t_{n+1})) - f(t_{n+1}, y_{n+1})\right) + \delta_n$$

$$|\varepsilon_{n+1}| \le |\varepsilon_n| + \frac{h}{2} L |\varepsilon_n| + \frac{h}{2} L |\varepsilon_{n+1}| + |\delta_n|, \qquad |\delta_n| \le M \cdot h^3$$

$$M = \max_{a \le t \le b} |y'''(t)|$$

$$\left(1 - \frac{hL}{2}\right)|\varepsilon_{n+1}| \le \left(1 + \frac{hL}{2}\right)|\varepsilon_n| + M h^3$$

Θεωρούμε υπάρχει $h_0 > 0$ τ.ω. $\forall h < h_0$ $1 - \frac{hL}{2} > 0$.

$$|\varepsilon_{n+1}| \leq \frac{1 + \frac{hL}{2}}{1 - \frac{hL}{2}} |\varepsilon_n| + \frac{M h^3}{1 - \frac{hL}{2}}$$

Επαγωγική υπόθεση : $|\varepsilon_n| \leq \frac{M h^2}{L} \left(\left(\frac{1 + \frac{hL}{2}}{1 - \frac{hL}{2}} \right)^n - 1 \right)$, $n \geq 0$

Για $n = 0$ έχουμε $|\varepsilon_0| = 0$, ισχύει η υπόθεση.

Έστω ότι ισχύει για n, να το δείξουμε για το $n+1$

$$|\varepsilon_{n+1}| \leq \frac{1+\frac{hL}{2}}{1-\frac{hL}{2}}|\varepsilon_n| + \frac{Mh^3}{1-\frac{hL}{2}}$$

$$\leq \frac{1+\frac{hL}{2}}{1-\frac{hL}{2}} \frac{Mh^2}{L}\left(\left(\frac{1+\frac{hL}{2}}{1-\frac{hL}{2}}\right)^n - 1\right) + \frac{Mh^3}{1-\frac{hL}{2}}$$

$$= \frac{Mh^2}{L}\left(\left(\frac{1+\frac{hL}{2}}{1-\frac{hL}{2}}\right)^{n+1} - \frac{1+\frac{hL}{2}}{1-\frac{hL}{2}} + \frac{hL}{1-\frac{hL}{2}}\right)$$

$$= \frac{Mh^2}{L}\left(\left(\frac{1+\frac{hL}{2}}{1-\frac{hL}{2}}\right)^{n+1} - \frac{1-\frac{hL}{2}}{1-\frac{hL}{2}}\right)$$

$$= \frac{Mh^2}{L}\left(\left(\frac{1+\frac{hL}{2}}{1-\frac{hL}{2}}\right)^{n+1} - 1\right)$$

$$1+x \le e^x \quad , \quad \frac{1+\frac{hL}{2}}{1-\frac{hL}{2}} = \frac{1-\frac{hL}{2}}{1-\frac{hL}{2}} + \frac{hL}{1-\frac{hL}{2}} = 1 + \frac{hL}{1-\frac{hL}{2}}$$

$$|\varepsilon_n| \leq \frac{Mh^2}{L}\left(\left(1+\frac{hL}{1-\frac{hL}{2}}\right)^n - 1\right)$$

$$\leq \frac{Mh^2}{2}\left(e^{nhL/(1-hL/2)} - 1\right), \qquad t_n = a + nh$$

$$\leq \frac{Mh^2}{2}\left(e^{\left[(b-a)L/(1-\frac{hL}{2})\right]} - 1\right), \qquad h < h_0, \qquad h_0 L < 2.$$

$$\leq \frac{Mh^2}{2}\left(e^{\frac{(b-a)L}{1-h_0L/2}} - 1\right) = \boxed{Ch^2}$$