Ευστάθεια (Απόσταση)

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(a) = y_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} z'(t) = f(t, z(t)) \\ z(a) = z_0 \end{cases}$$

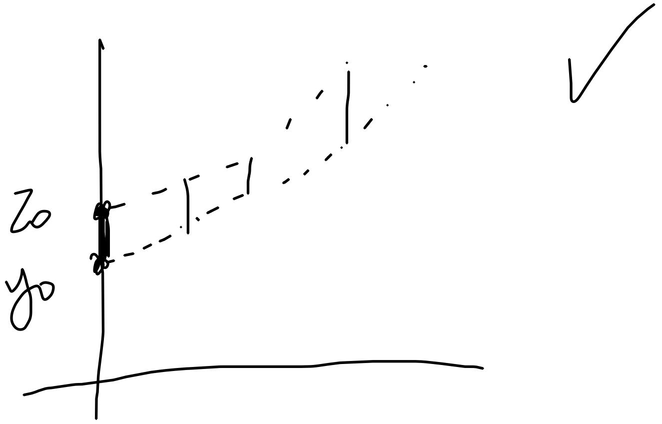
f "ολική" Lipschitz.

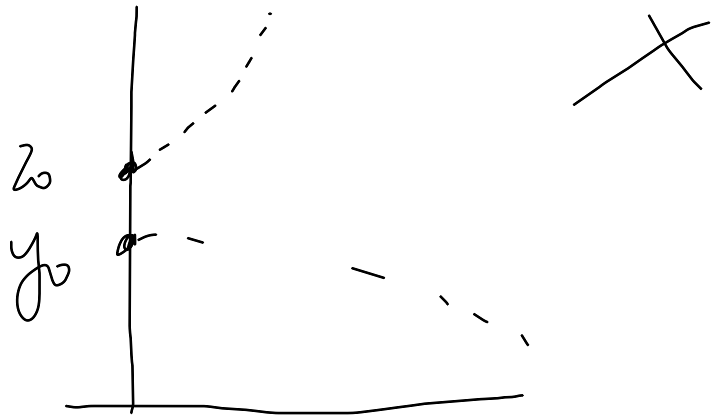
$$\max_{a \le t \le b} |y(t) - z(t)| \le C\,|y_0 - z_0|$$

Άμεση Euler

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h f(t_n, y_n) \\ y_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} z_{n+1} = z_n + h f(t_n, z_n) \\ z_0 \end{cases}$$

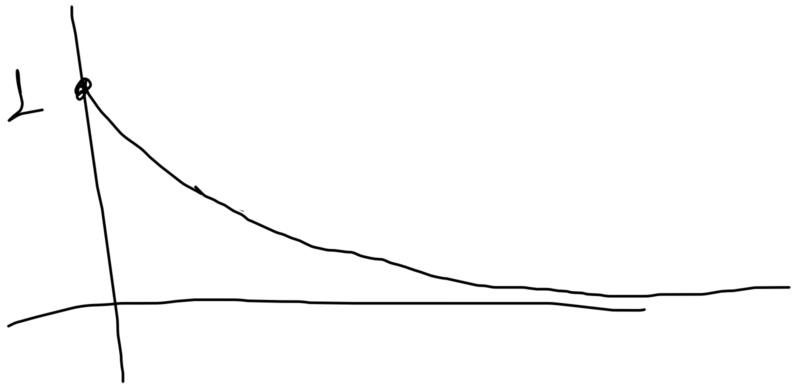
$$\max_{0 \le n \le N} |y_n - z_n| \le C_1 |y_0 - z_0|$$

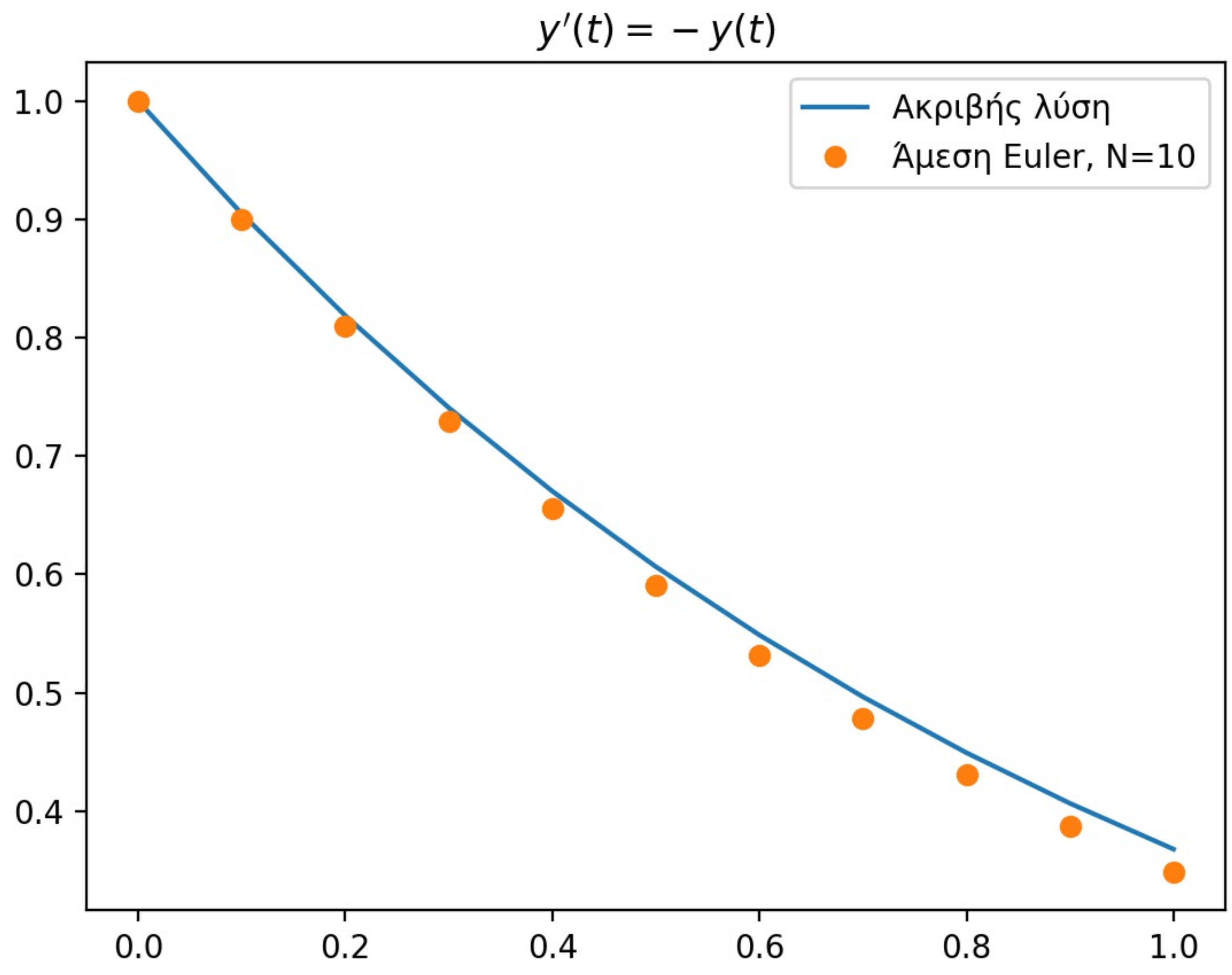




$$\begin{cases} y'(t) = -y(t) & 0 < t \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$$y(t) = e^{-t}$$



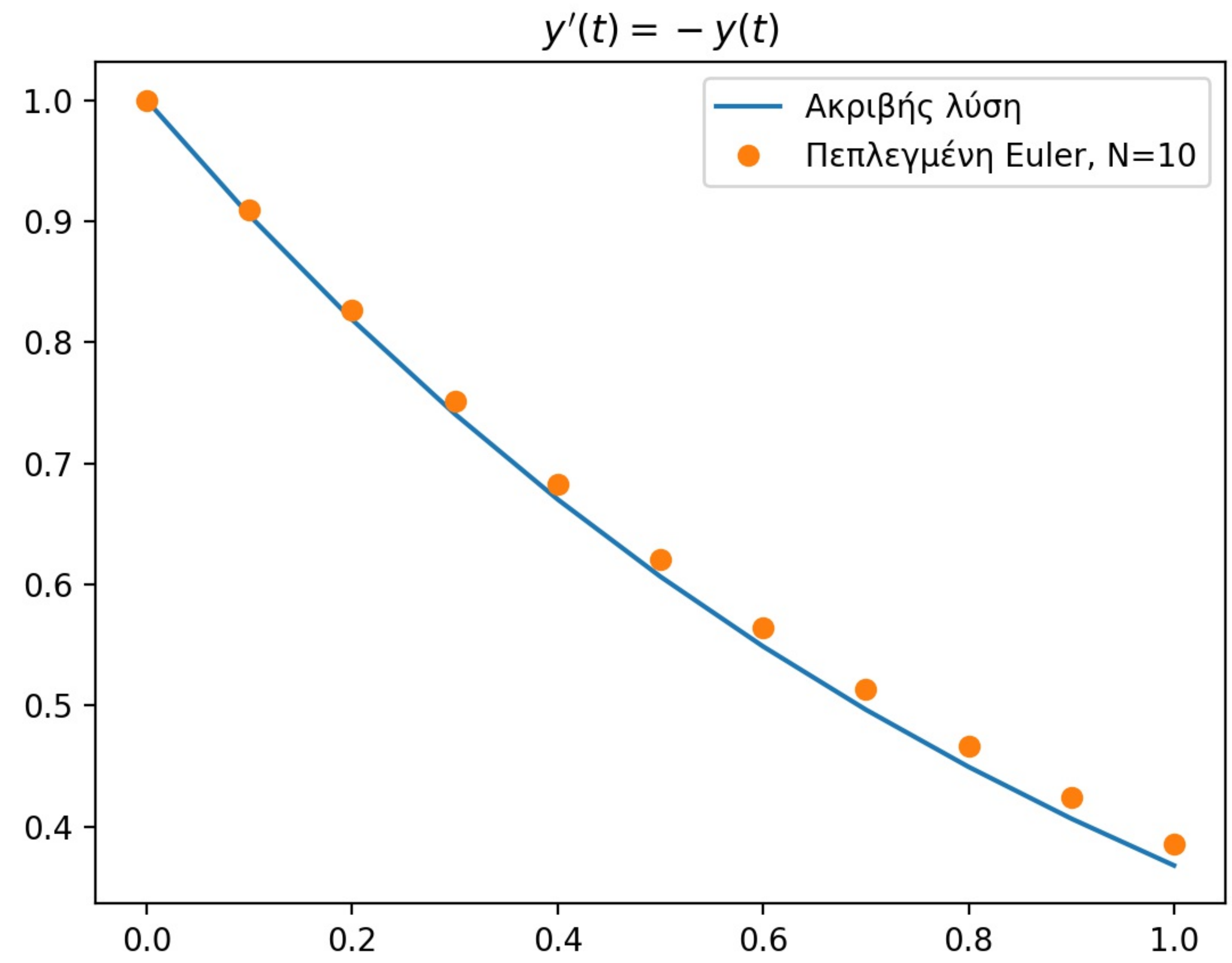

$y'(t) = -y(t)$
Ακριβής λύση
Άμεση Euler, N=10
1.0
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0

Penyelesaian Euler.

$$y_{n+1} = y_n + h f(t_{n+1}, y_{n+1})$$

$$= y_n + h(-y_{n+1})$$

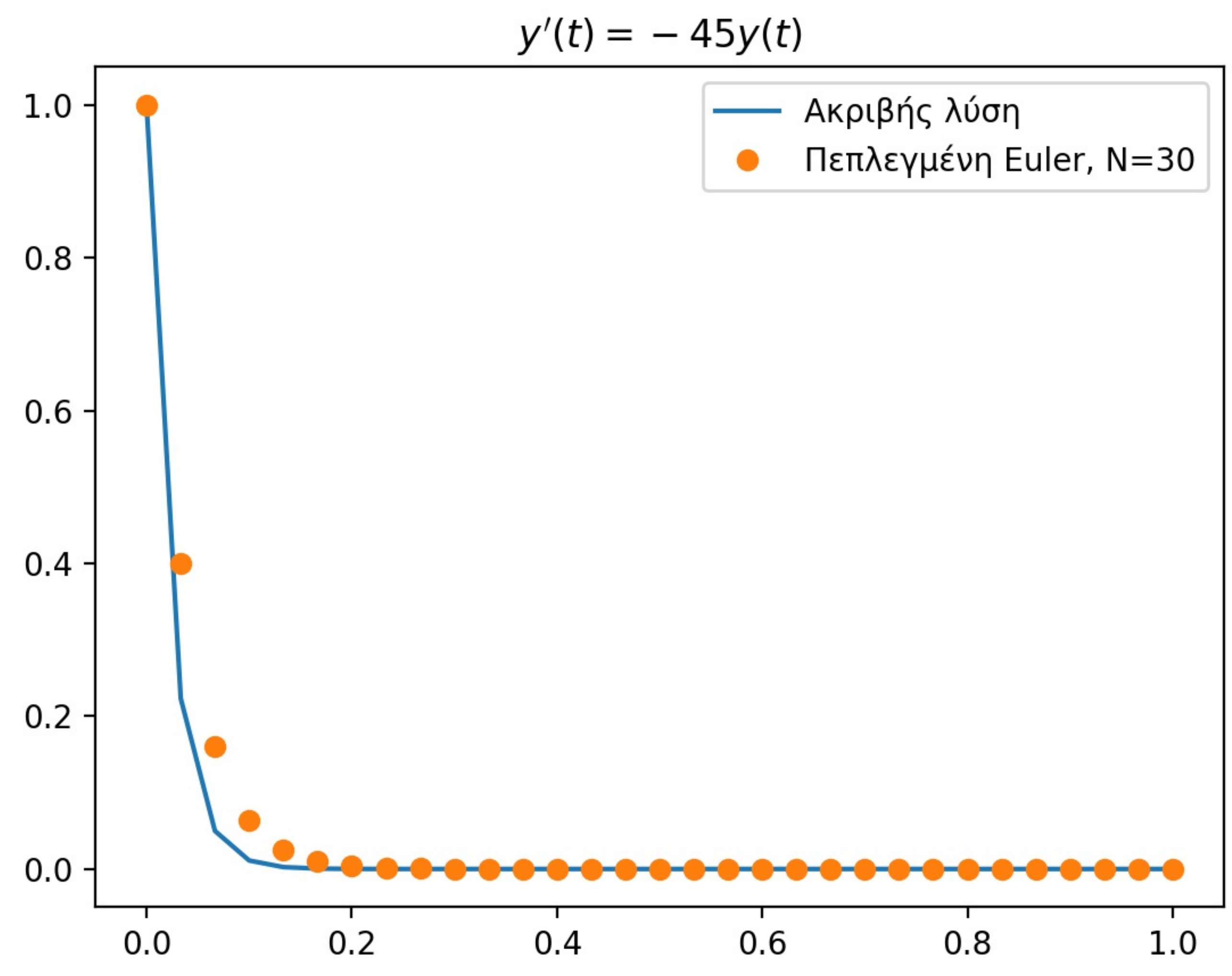
$$\therefore \quad (1+h) y_{n+1} = y_n \quad \therefore \quad y_{n+1} = \frac{1}{1+h} y_n$$



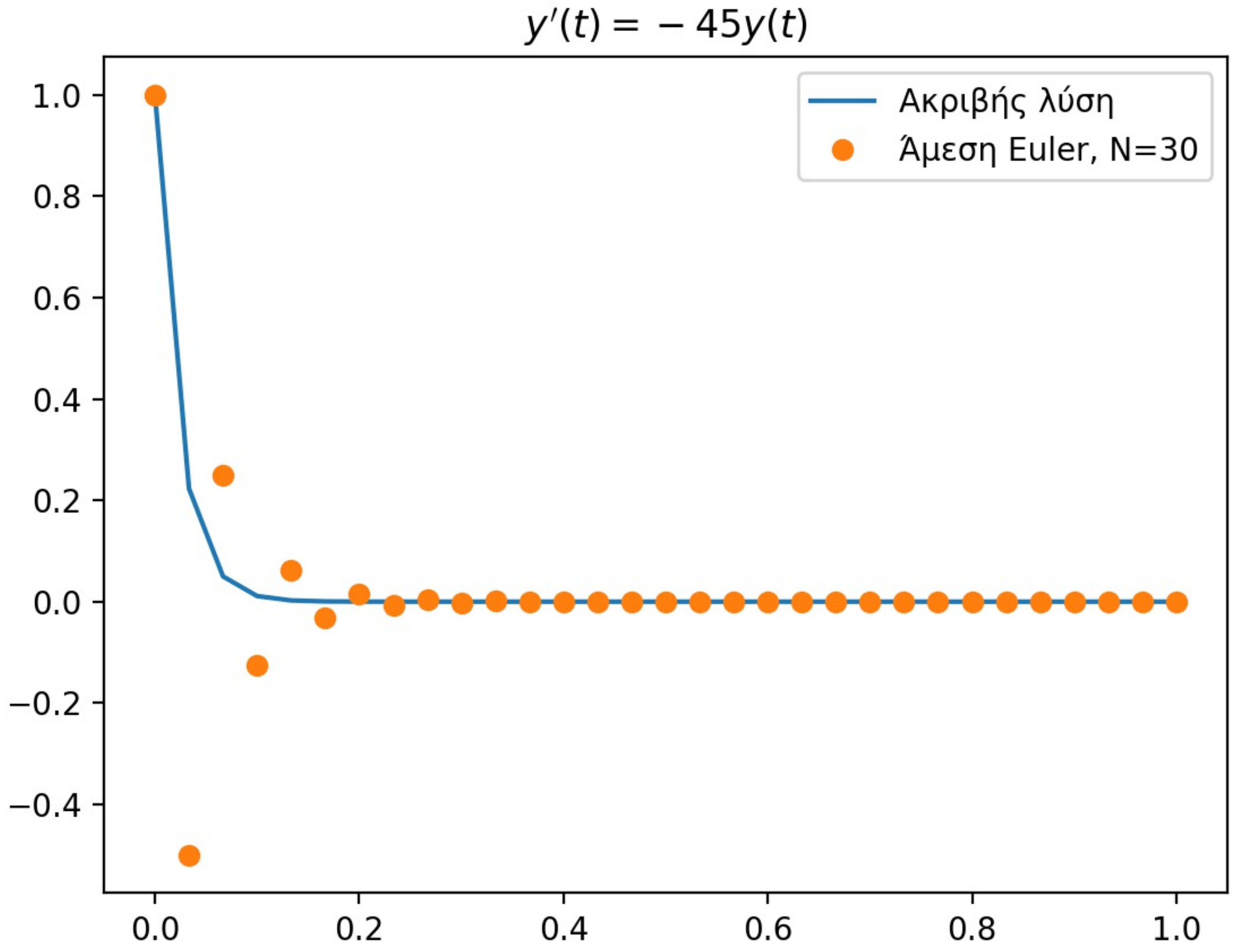
$y'(t) = -y(t)$
Ακριβής λύση
Πεπλεγμένη Euler, N=10
1.0
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0

$$y'(t) = -45\, y(t)$$
$$y(0) = 1$$

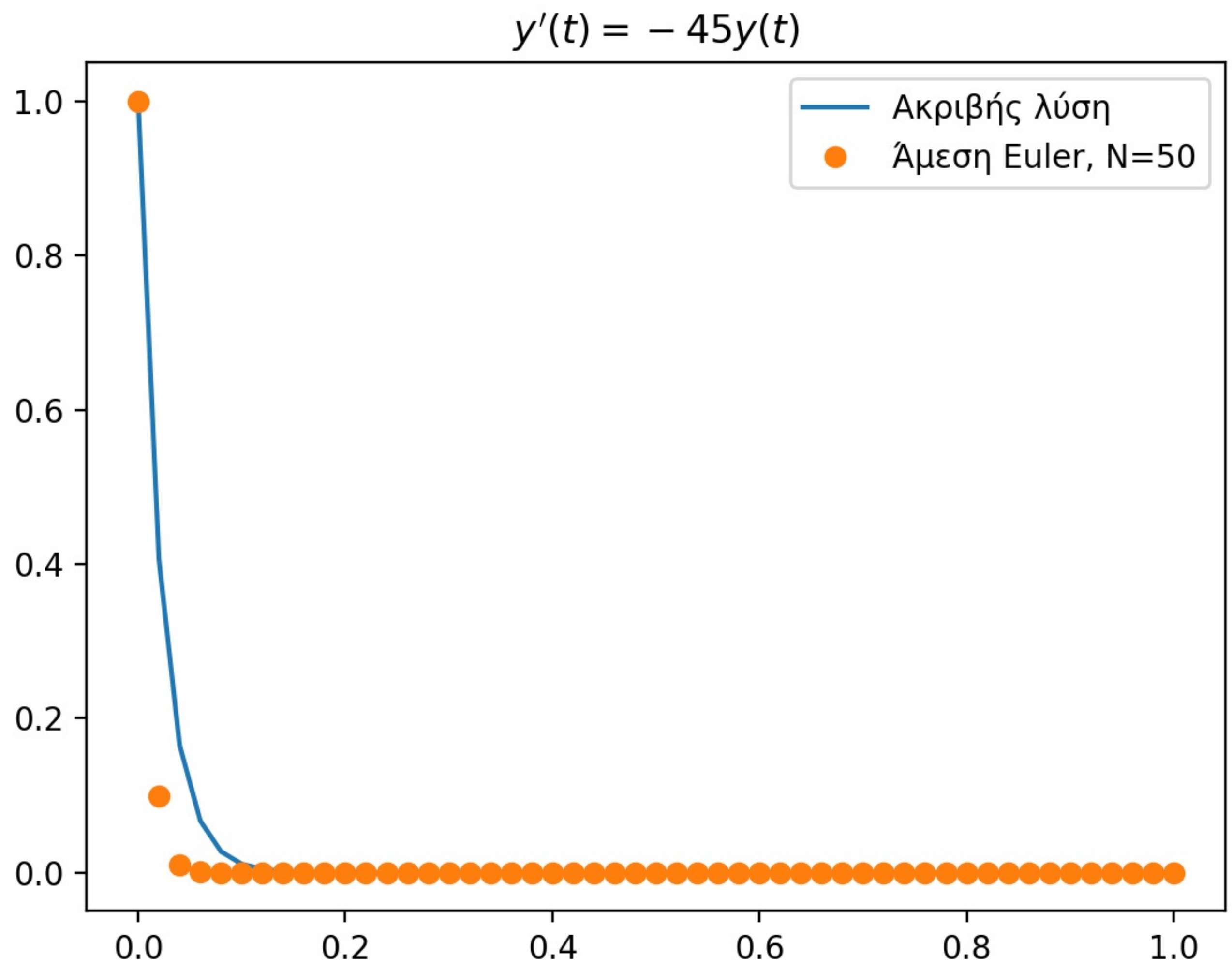
$$y(t) = e^{-45t}$$



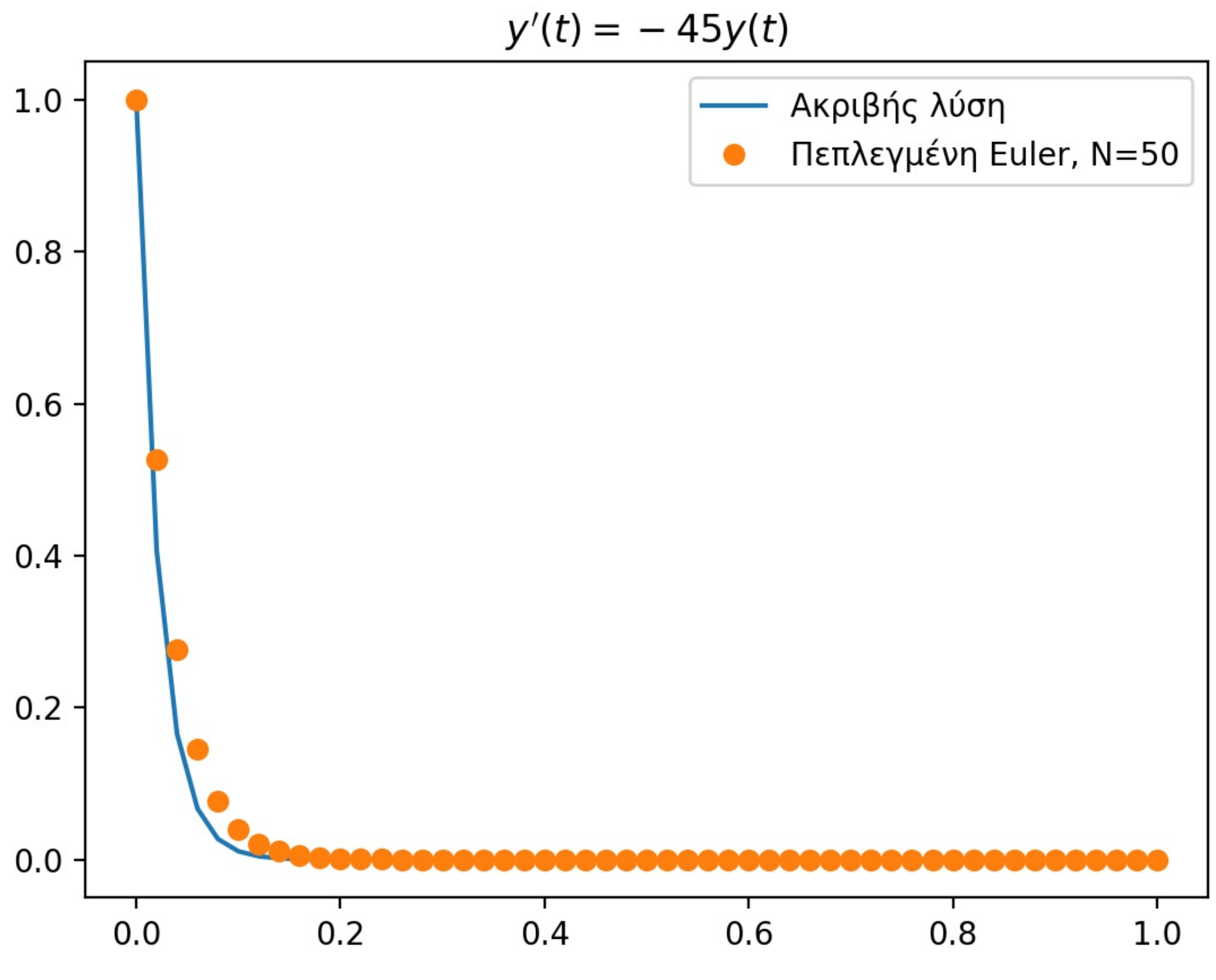
$y'(t) = -45y(t)$
Ακριβής λύση
Πεπλεγμένη Euler, N=30
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0



$y'(t) = -45y(t)$
Ακριβής λύση
Άμεση Euler, N=30
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
−0.2
−0.4
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0



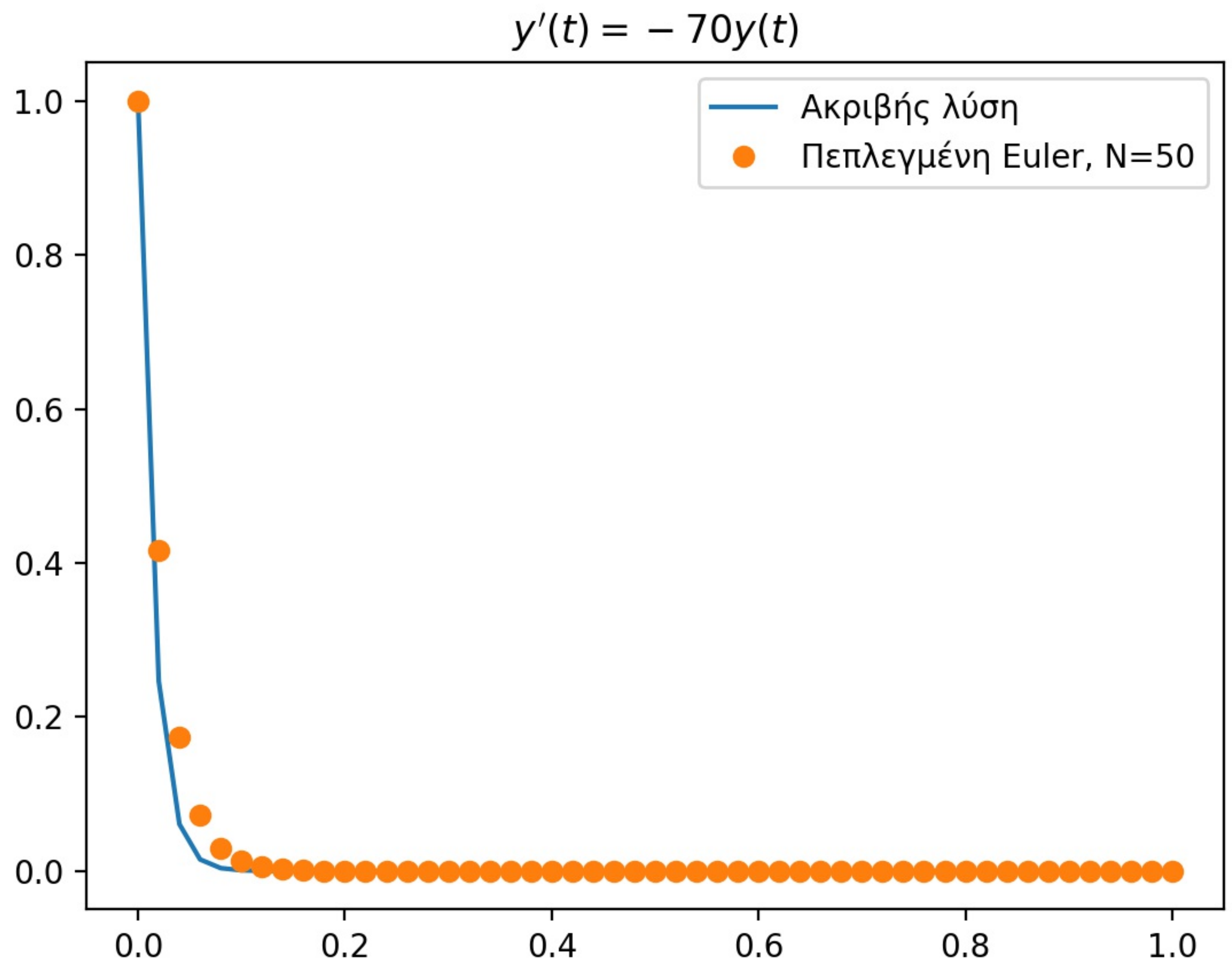
$y'(t) = -45y(t)$
Ακριβής λύση
Άμεση Euler, N=50
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0

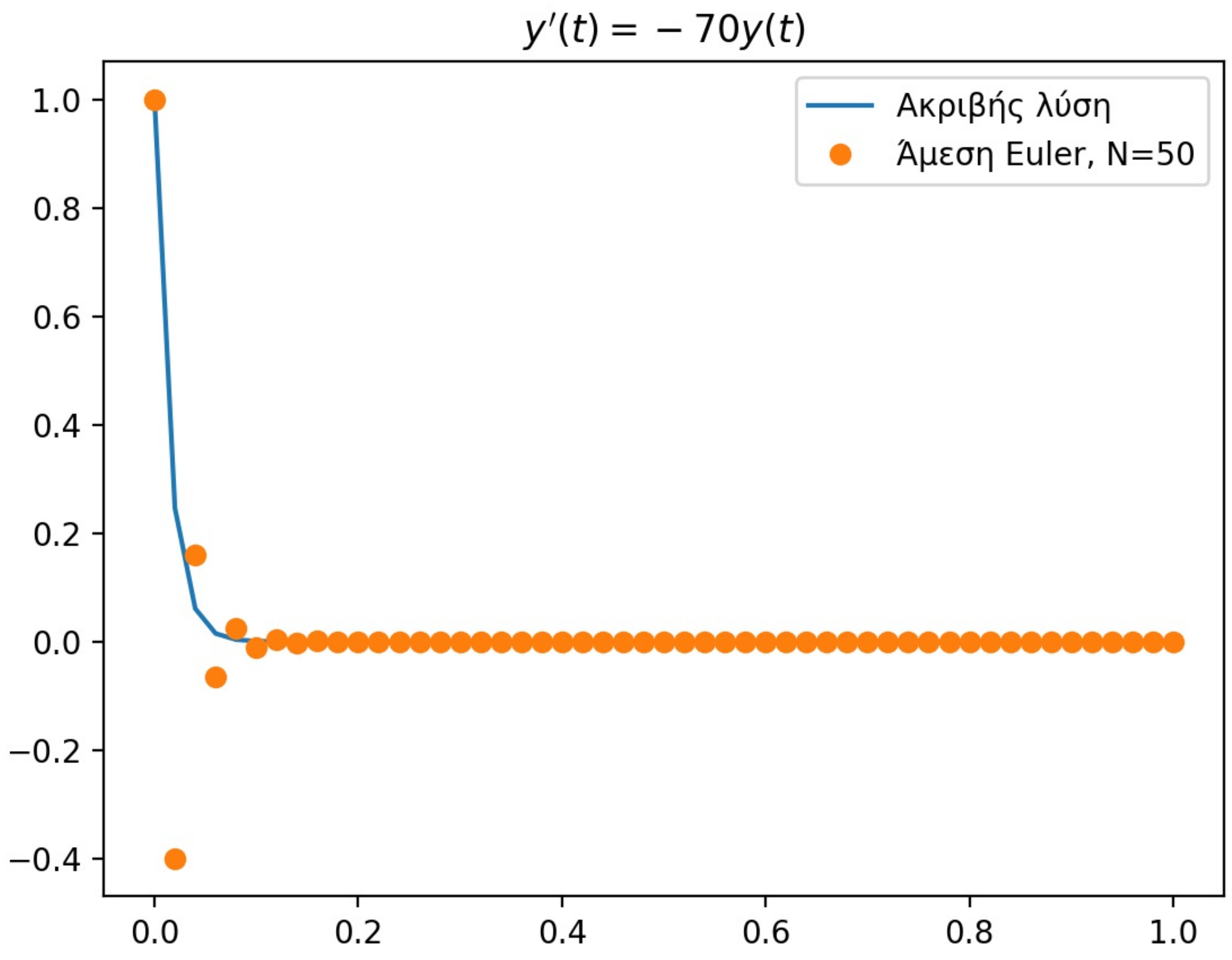


$y'(t) = -45y(t)$
Ακριβής λύση
Πεπλεγμένη Euler, N=50
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0

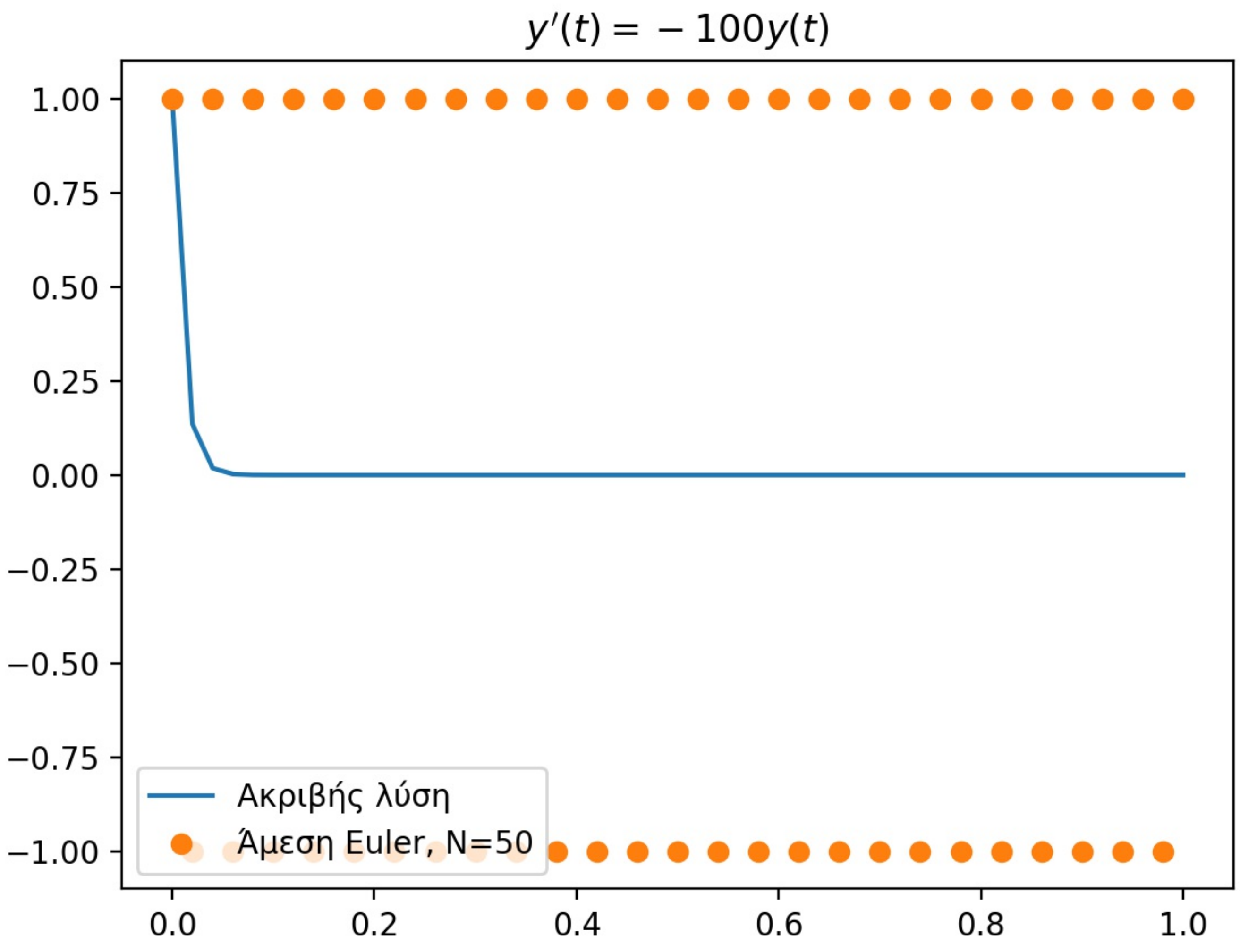
$$y'(t) = -70\, y(t)$$
$$y(0) = 1$$

$$y(t) = e^{-70t}$$

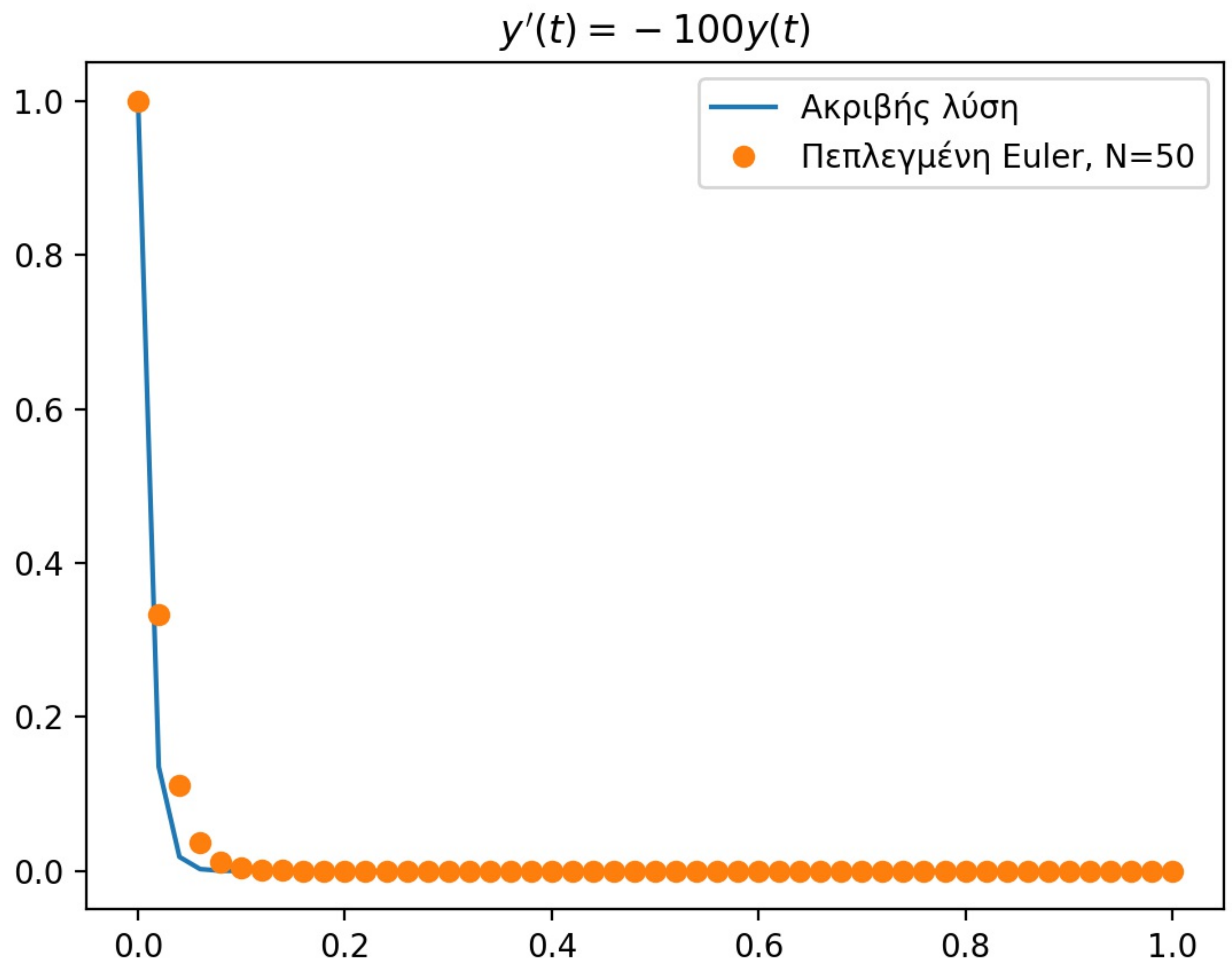

$y'(t) = -70y(t)$
Ακριβής λύση
Πεπλεγμένη Euler, N=50
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0

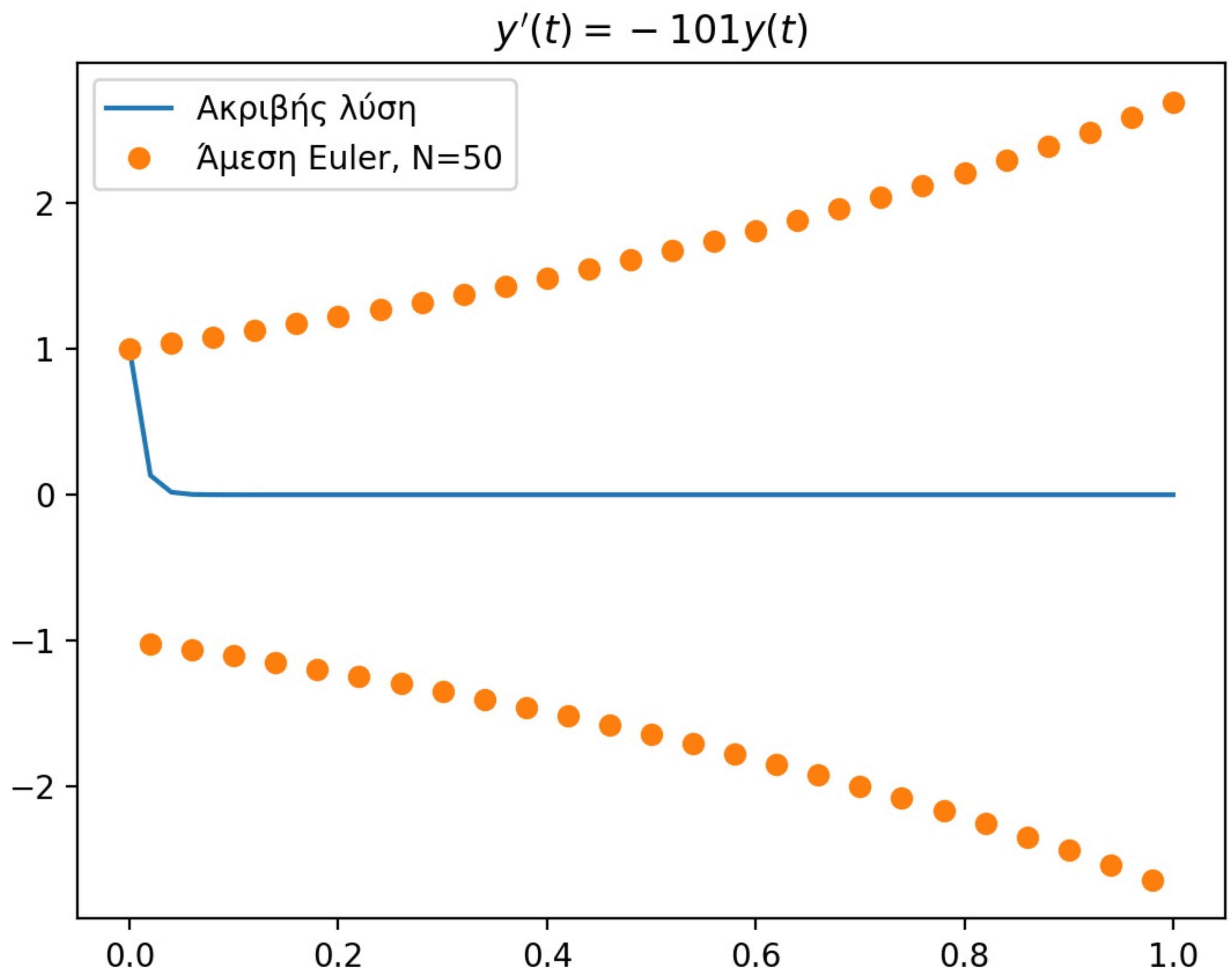


$y'(t) = -70y(t)$
Ακριβής λύση
Άμεση Euler, N=50
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
−0.2
−0.4
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0

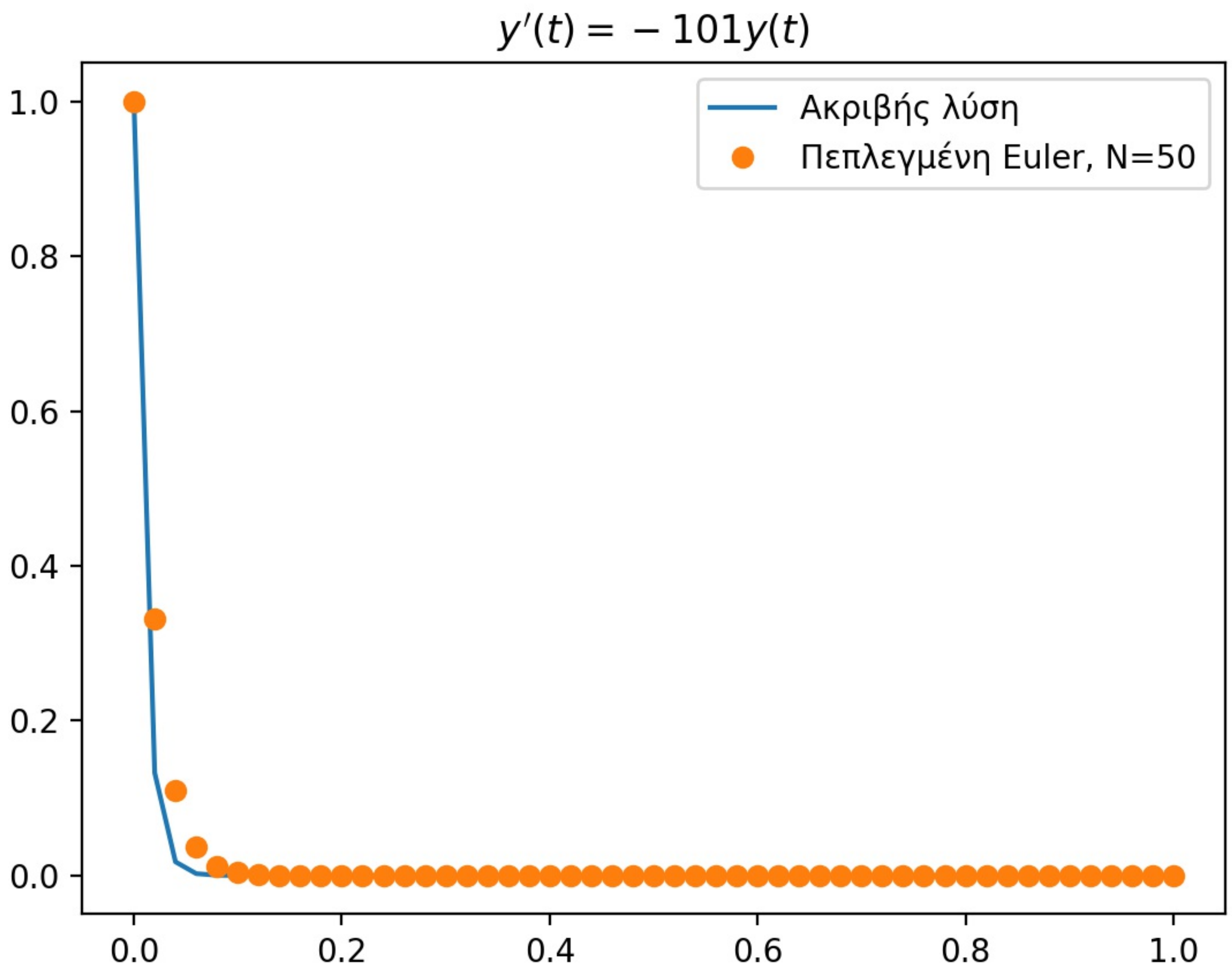


$y'(t) = -100y(t)$
1.00
0.75
0.50
0.25
0.00
−0.25
−0.50
−0.75
−1.00
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
Ακριβής λύση
Άμεση Euler, N=50

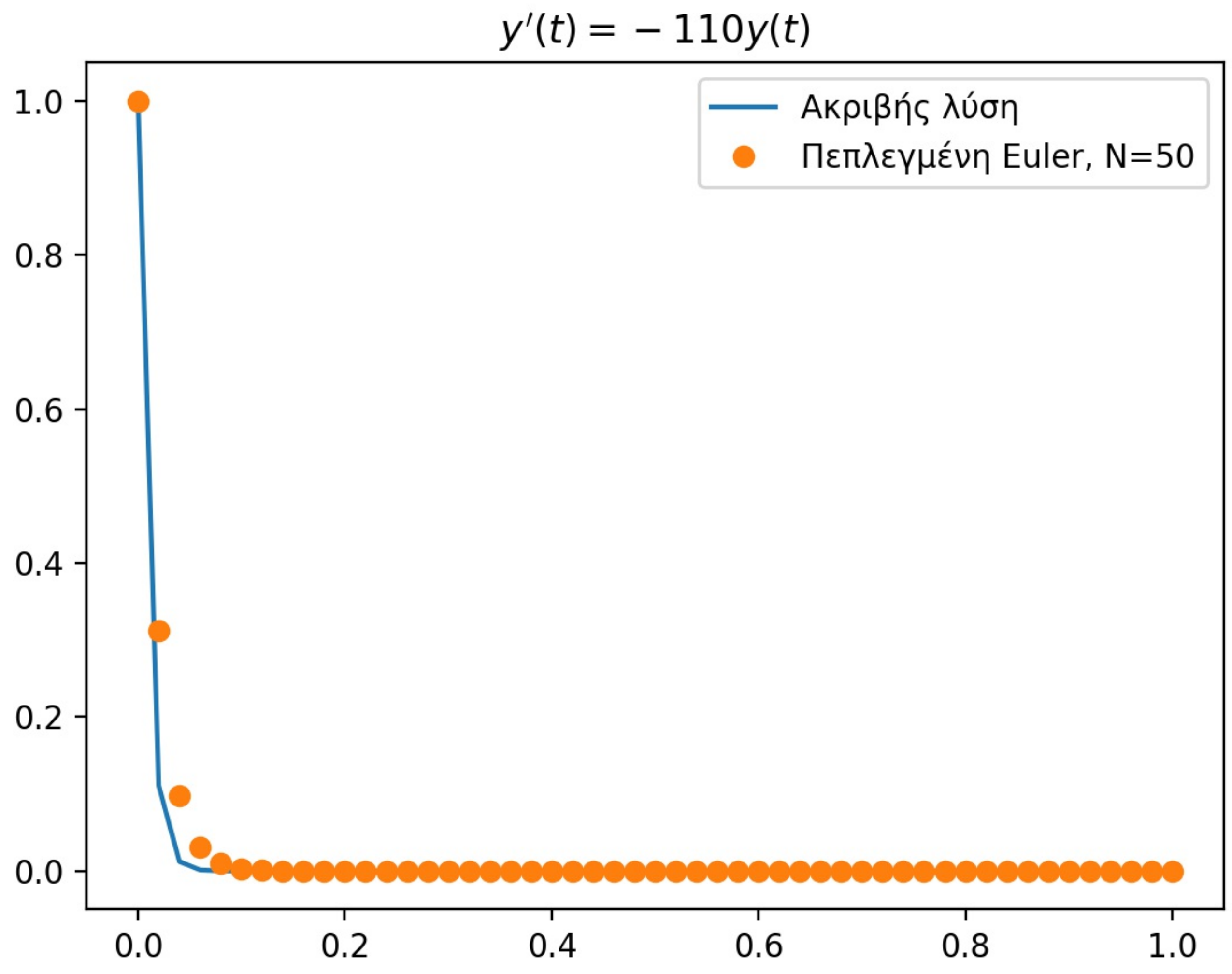

$y'(t) = -100y(t)$
Ακριβής λύση
Πεπλεγμένη Euler, N=50
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0



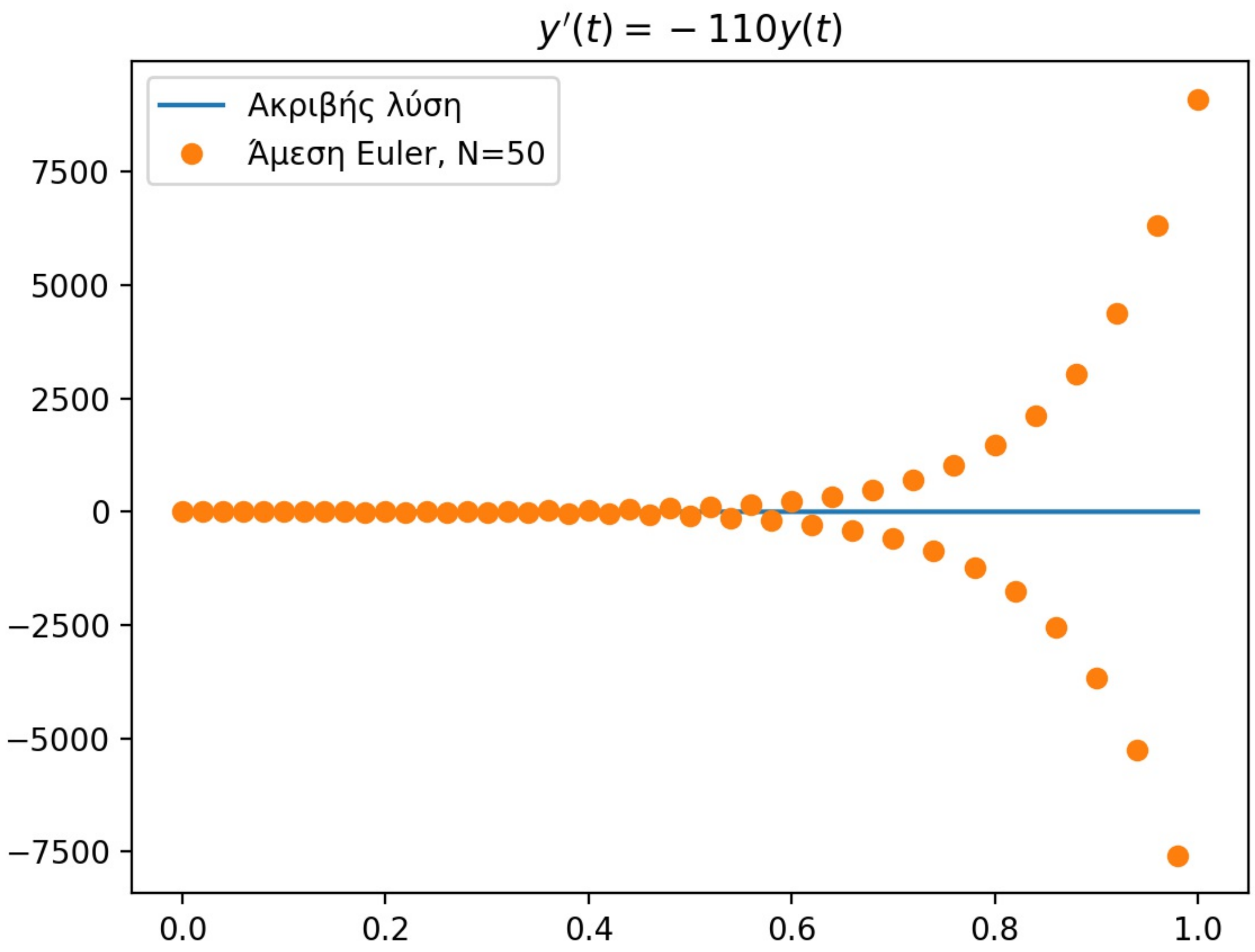
$y'(t) = -101y(t)$
Ακριβής λύση
Άμεση Euler, N=50
2
1
0
−1
−2
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0

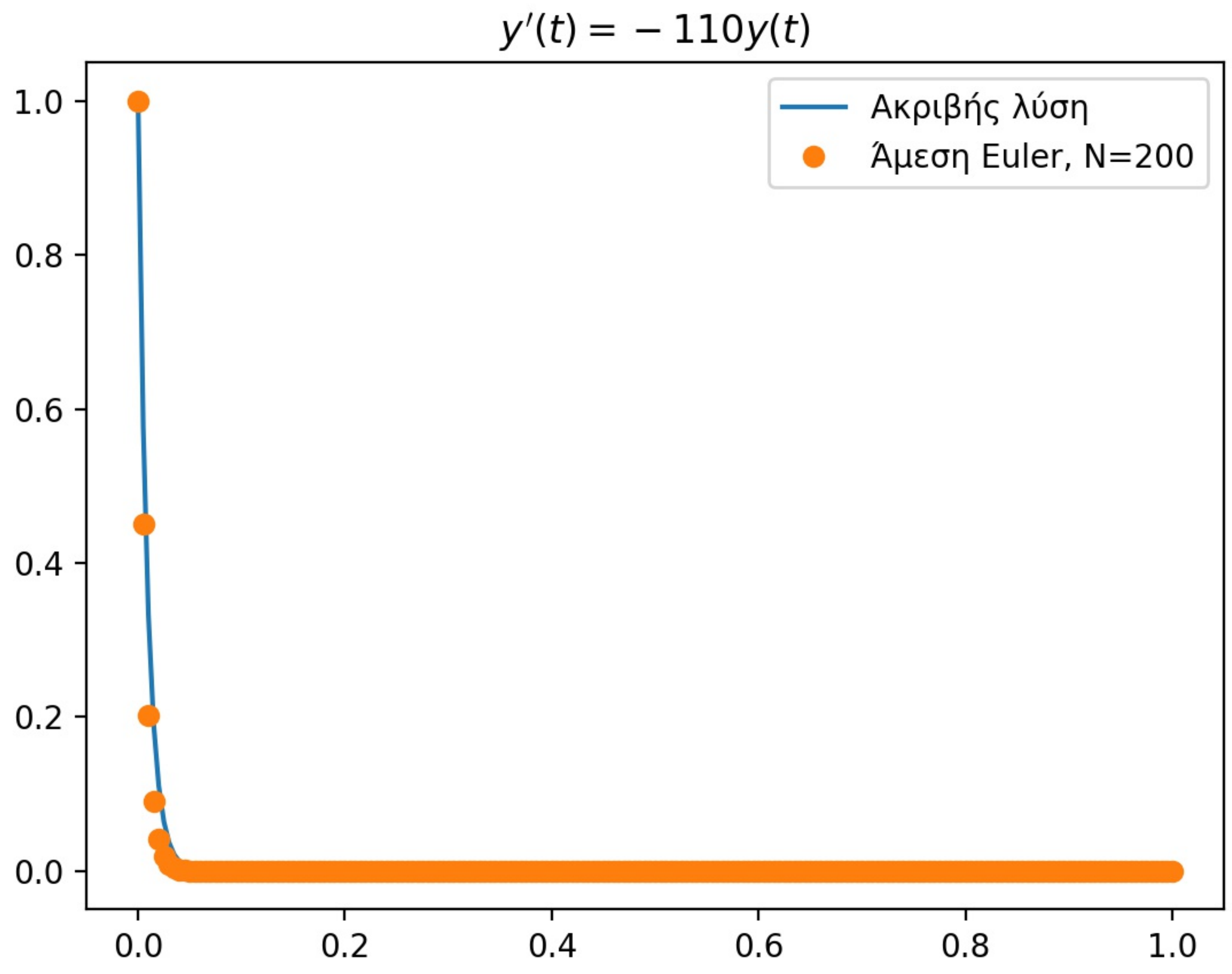


$y'(t) = -101y(t)$
Ακριβής λύση
Πεπλεγμένη Euler, N=50
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0



$y'(t) = -110y(t)$
Ακριβής λύση
Πεπλεγμένη Euler, N=50
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0


$y'(t) = -110y(t)$
Ακριβής λύση
Άμεση Euler, N=50
7500
5000
2500
0
−2500
−5000
−7500
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0


$y'(t) = -110y(t)$
Ακριβής λύση
Άμεση Euler, N=200
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0

Θεωρούμε $\begin{cases} y'(t) = \lambda y(t) \\ y(0) = 1 \end{cases}$ $\quad t \in [0, \infty)$ $\quad y(t) = e^{\lambda t}$

$\lambda < 0$ $\quad y(t) \xrightarrow{t \to \infty} 0.$

Θέλουμε $\{y_n\} \approx y(t_n)$, y_n να φθίνουν στο 0.

· Άμεση Euler $\quad y_{n+1} = y_n + h f(t_n, y_n) = y_n + h\lambda y_n$

$$= (1 + h\lambda) y_n$$

$$y_0 = 1, \quad y_1 = (1+h\lambda) y_0 = (1+h\lambda), \quad y_2 = (1+h\lambda) y_1 = (1+h\lambda)^2, \ldots, \quad y_n = (1+h\lambda)^n$$

Σύγκλιση της μεθόδου

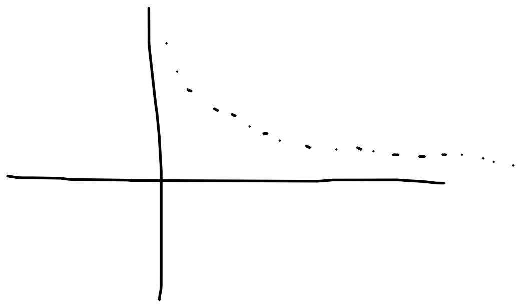
καθώς $h \to 0$, $t = t_n = nh$

τότε το $n \to \infty$

$$y_n = (1+h\lambda)^n = \left(1+\lambda \cdot \frac{t_n}{n}\right)^n = \left(1+\lambda \frac{t}{n}\right)^n \xrightarrow{n\to\infty} e^{\lambda t}$$

Σταθερό h

$$|y_n| = |1+h\lambda|^n$$



καθώς $n \to \infty$ θέλω

$$|y_n| \to 0$$

Για να ισχύει αυτό πρέπει $|1+h\lambda| < 1$.

Αν $|1+h\lambda| = 1 \Rightarrow |y_n| = 1$.

Αν $|1+h\lambda| > 1 \Rightarrow |y_n| \to \infty$!

Για να εφαρμόσουμε την άμεση Euler στο

$$\begin{cases} y'(t) = e^{\lambda t} \\ y(0) = 1 \end{cases}, \quad \lambda < 0$$

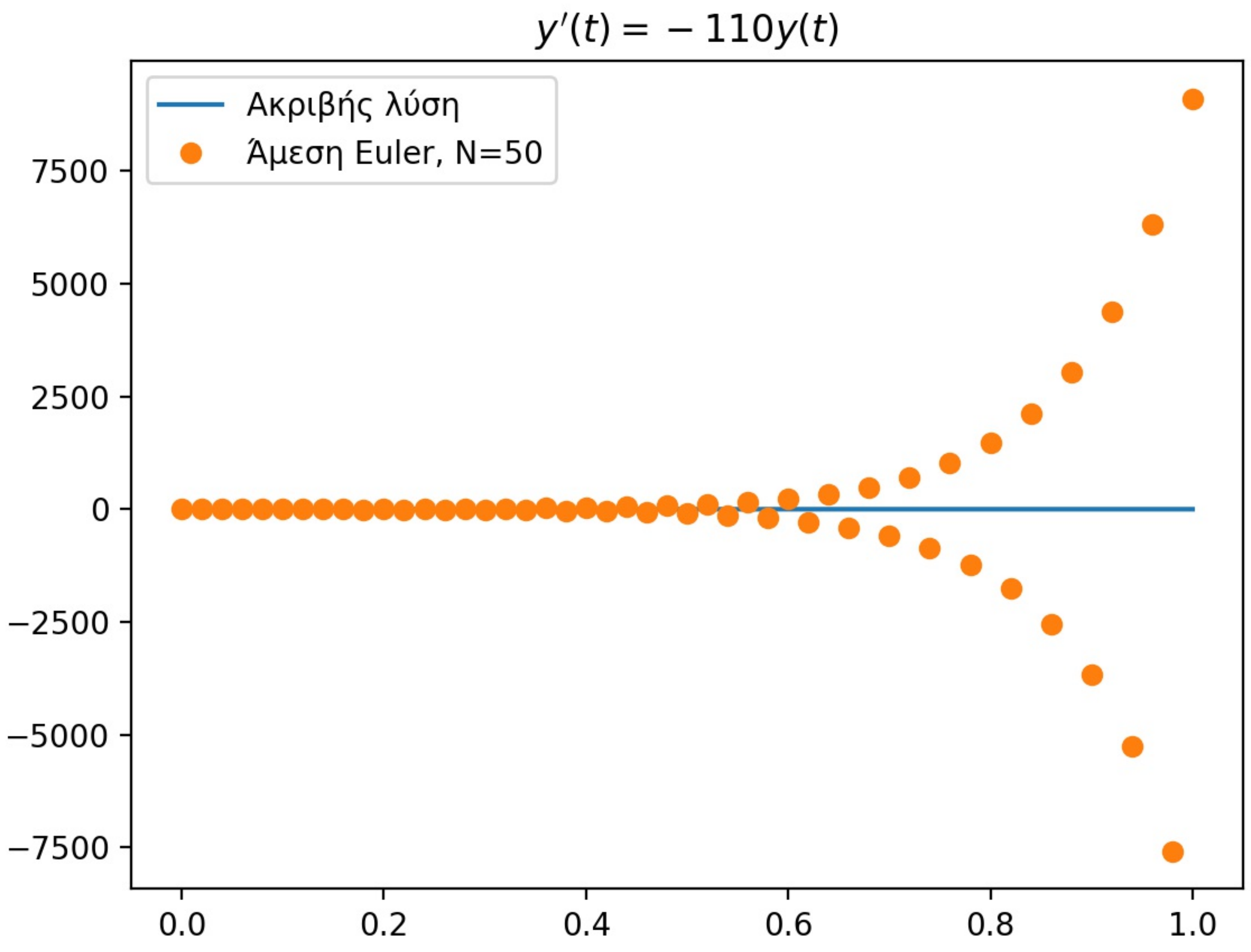
Πρέπει h να είναι τέτοιο ώστε $|1+h\lambda| < 1$.

$$\Rightarrow h\lambda \in (-2, 0)$$

Ορισμός: Λέμε ότι μια μέθοδος για την αριθμητική επίλυση του ΠΑΤ είναι <u>απόλυτα ευσταθής</u> για κάποιο $\underline{h} > 0$, αν όταν εφαρμοστεί στο πρόβλημα $y'(t) = \lambda y(t)$, $\lambda < 0$ δίνει προσεγγίσεις y_n οι οποίες παραμένουν φραγμένες καθώς $n \to \infty$.

Το διάστημα $I = [\alpha, 0]$, $-\infty \leq \alpha < 0$ τέτοιο ώστε η μέθοδος να είναι απόλυτα ευσταθής για $h\lambda \in I$, λέγεται διάστημα απόλυτης ευστάθειας της μεθόδου.

Το διάστημα της απόλυτης ευστάθειας για την άμεση Euler είναι $[-2, 0]$.


$y'(t) = -110y(t)$
Ακριβής λύση
Άμεση Euler, N=50
7500
5000
2500
0
−2500
−5000
−7500
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0