Απόλυτη ευστάθεια της πεπλεγμένης μεθόδου Euler.

$$y_{n+1} = y_n + h f(t_{n+1}, y_{n+1})$$

$$y'(t) = f(t, y(t)) = \lambda y(t) \quad , \quad \underline{\lambda < 0}$$

$$y_{n+1} = y_n + h\lambda y_{n+1} \quad \text{ή} \quad (1-h\lambda) y_{n+1} = y_n$$

$$\text{ή} \quad y_{n+1} = \frac{1}{1-h\lambda} y_n \quad , \quad h\lambda \neq 1.$$

$$y_0 = 1, \quad y_1 = \frac{1}{1-h\lambda}, \quad y_2 = y_1 \cdot \frac{1}{1-h\lambda} = \left(\frac{1}{1-h\lambda}\right)^2, \dots, \quad \underline{y_n = \left(\frac{1}{1-h\lambda}\right)^n}, \quad n > 0$$

Κριτήριο για απόλυτη ευστάθεια. y_n φραγμένη για $n \to \infty$.

$$|y_n| = \left|\frac{1}{1-h\lambda}\right|^n, \quad \lambda<0 \quad h\lambda<0 \quad 1-h\lambda>1.$$

άρα $\left|\frac{1}{1-h\lambda}\right| < 1$ για κάθε επιλογή $h>0$ και $\lambda<0$

$|y_n| \to 0$, για κάθε επιλογή h & $\lambda<0$

Η πεπλεγμένη μέθοδος του Euler είναι απόλυτα ευσταθής για κάθε επιλογή $h>0$ & $\lambda<0$.

Το διάστημα απόλυτης ευστάθειας είναι $(-\infty, 0)$

Μέθοδος τραπεζίου

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left(f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_{n+1}) \right)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left(\lambda y_n + \lambda y_{n+1} \right)$$

ή $\left(1 - \frac{h\lambda}{2}\right) y_{n+1} = \left(1 + \frac{h\lambda}{2}\right) y_n$, $\quad h\lambda/2 \neq 1$

ή $y_{n+1} = \dfrac{1 + h\lambda/2}{1 - h\lambda/2}\, y_n$

ή $y_n = \left(\dfrac{1 + h\lambda/2}{1 - h\lambda/2} \right)^n y_0$, $\quad y_0 = 1$

Θα έχουμε να συγκλίνει αν $\left|\dfrac{1+h\lambda/2}{1-h\lambda/2}\right| < 1$

$w = h\lambda$, $\quad \left|\dfrac{1+w/2}{1-w/2}\right| = \left|\dfrac{1-w/2+w}{1-w/2}\right| = \left|1+\dfrac{w}{1-w/2}\right| < 1$

αρκεί $\quad \dfrac{w}{1-w/2} \in (-2,0)$

$-2 < \dfrac{w}{1-w/2} < 0$ ή $-2\left(1-\dfrac{w}{2}\right) < w < 0$

ή $\quad -2+w < w < 0$, για $w<0$

$|y_n| \to 0$ $\quad n\to\infty$ για κάθε $h>0$ και $\lambda<0$

Διάστημα απόλυτης ευστάθειας ευστάθειας της $(-\infty,0)$

Επεκτείνουμε στους $\lambda \in \mathbb{C}$.

$$\begin{cases} y'(t) = \lambda y(t) \\ y(0) = 1 \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad \operatorname{Re}\lambda < 0.$$

$$y(t) = e^{\lambda t}$$

$$|y(t)| = e^{(\operatorname{Re}\lambda) t} \xrightarrow{t \to \infty} 0.$$

μέτρο - απόλυτη τιμή μιγαδικού.

$$z \in \mathbb{C}, \quad |z| = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2}$$

$$|z|^2 = z\bar{z}, \qquad z = a + ib, \quad \bar{z} = a - ib.$$

Απόλυτη ευστάθεια.

Για $h>0$ και $\lambda \in \mathbb{C}$, $\underline{\mathrm{Re}\lambda < 0}$

Θέλουμε οι προσεγγίσεις y_n, $|y_n|$ να είναι <u>φραγμένο</u>

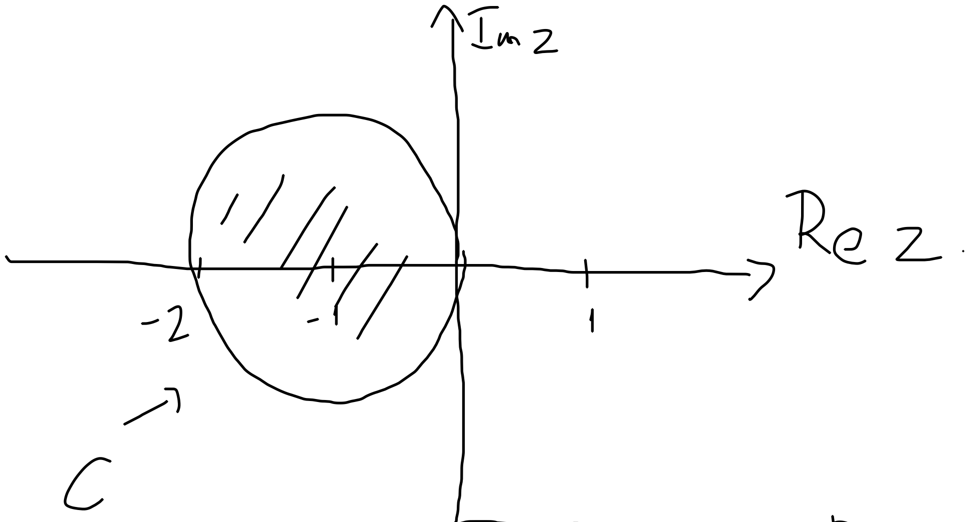
Παράδειγμα Euler & τραπεζίου.

Οι προσεγγίσεις θα είναι φραγμένες για κάθε $h>0$ & $\lambda \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}\lambda < 0$

Άμεση μέθοδος του <u>Euler</u>

οι προσεγγίσεις θα είναι φραγμένες όταν h και $\lambda \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}\lambda < 0$

$$\underbrace{|1+h\lambda|}_{\text{μιγαδικό μέτρο}} < 1$$



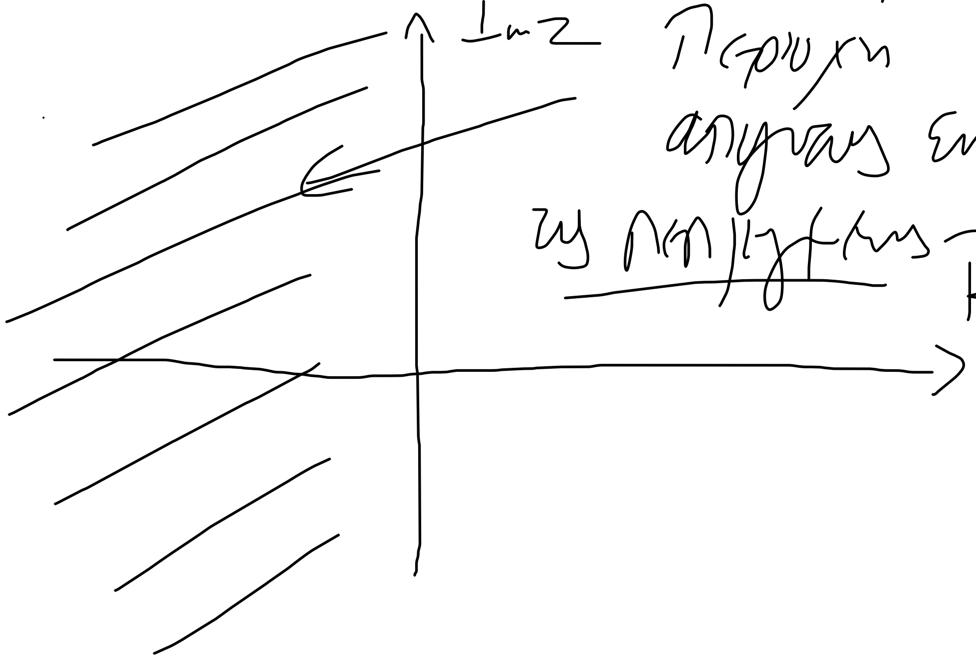
$h\lambda \in C$, $|1+h\lambda| < 1$ → Περιοχή απόλυτης ευστάθειας της άμεσης Euler.

Περιοχή απόλυτης ευστάθειας: Είναι το σύνολο C των τιμών $h\lambda \in C$ τέτοια ώστε η μέθοδος να είναι απόλυτα ευσταθής.

Πεπλεγμένη Euler.

$$C = \{ z \in \mathbb{C},\ \operatorname{Re} z < 0 \ ;\ \text{η μέθοδος είναι απόλυτα ευσταθής} \}$$

$$= \{ z \in \mathbb{C},\ \operatorname{Re} z < 0 \}$$



Περιοχή απόλυτης ευστάθειας της πεπλεγμένης Euler.

Ορισμός : A-ευστάθεια

Είναι οι μέθοδοι οι οποίες είναι απόλυτα ευσταθείς για κάθε επιλογή $Re\lambda < 0$ και $h > 0$.

A-ευσταθείς : Πεπλεγμένη Euler

Τραπεζίου