Διβηματικές μέθοδοι

$t_0 = a < t_1 < \dots < t_N$ $\qquad y_0, y_1, \dots, y_N, \qquad y_n \approx y(t_n)$

$t_n \longrightarrow t_{n+1}$ $\qquad y_n \longrightarrow y_{n+1}$ Μονοβηματικές

π.χ. Euler, τραπεζίου.

$t_{n-1} \quad t_n \quad t_{n+1}$ $\qquad y_{n-1}, y_n \longrightarrow y_{n+1}$: Διβηματικές μέθοδοι

Μέσου, Simpson, AB(2).

Η γενική μορφή των διβηματικών μεθόδων.

$$a_2 y_{n+2} + a_1 y_{n+1} + a_0 y_n = h\left(\beta_2 f(t_{n+2}, y_{n+2}) + \beta_1 f(t_{n+1}, y_{n+1}) + \beta_0 f(t_n, y_n)\right)$$

$n = 0, 1, 2, \dots, N-2$.

Θα πρέπει να γνωρίζουμε τις y_0, y_1

Μέσου: $y_{n+1} = y_{n-1} + 2h f(t_n, y_n)$, $n = 1, 2, \dots, N-1$

$t_{n-1}, t_n \longrightarrow t_{n+1}$

$$y_{n+2} = y_n + 2h f(t_{n+1}, y_{n+1})$$

ή $y_{n+2} - y_n = h \cdot 2 \cdot f(t_{n+1}, y_{n+1}) \Rightarrow$ $a_2 = 1$, $a_1 = 0$, $a_0 = -1$. $\beta_2 = 0$, $\beta_1 = 2$, $\beta_0 = 0$

Simpson

$$y_{n+2} = y_n + h\left(\frac{1}{3} f(t_{n+2}, y_{n+2}) + \frac{4}{3} f(t_{n+1}, y_{n+1}) + \frac{1}{3} f(t_n, y_n)\right)$$

$$y_{n+2} - y_n = h\left(\frac{1}{3} f(t_{n+2}, y_{n+2}) + \frac{4}{3} f(t_{n+1}, y_{n+1}) + \frac{1}{3} f(t_n, y_n)\right)$$

$$a_2 = 1,\ a_1 = 0,\ a_0 = -1,\quad \beta_2 = \frac{1}{3},\ \beta_1 = \frac{4}{3},\ \beta_0 = \frac{1}{3}$$

AB(2)

$$: a_2 = 1,\ a_1 = -1,\ a_0 = 0$$

$$\beta_2 = 3/2,\ \beta_1 = 0,\ \beta_0 = -1/2$$

Συμβολισμός: $f_{n+k} = f(t_{n+k}, y_{n+k})$

$$a_2 y_{n+2} + a_1 y_{n+1} + a_0 y_n = h(\beta_2 f_{n+2} + \beta_1 f_{n+1} + \beta_0 f_n)$$

Τοπικό σφάλμα διακριτοποίησης.

Euler.

$$t_n \longrightarrow t_{n+1}$$

$$y(t_n) \longrightarrow y(t_n) + h f(t_n, y(t_n)) \quad -$$

$$y(t_{n+1}) - \{ y(t_n) + h f(t_n, y(t_n)) \}$$

$$= y(t_{n+1}) - \{ y(t_n) + h y'(t_n) \} = \delta_n = O(h^2)$$

Ενώ $\quad y_{n+1} = y_n + h f(t_n, y_n)$

Γενικό σχήμα διακριτοποίησης (2-βηματικές μέθοδοι)

$$t_n, t_{n+1} \longrightarrow t_{n+2}$$

$$y(t_n), y(t_{n+1}) \qquad \{\text{μέθοδο}\}$$

$$a_2 y(t_{n+2}) + a_1 y(t_{n+1}) + a_0 y(t_n) - h\left(\beta_2 f(t_{n+2}, y(t_{n+2})) + \beta_1 f(t_{n+1}, y(t_{n+1})) + \beta_0 f(t_n, y(t_n))\right)$$

$$= \delta_n$$

Αν $\delta_n = O(h^{p+1})$ τότε $p > 0$, p καλείται <u>τάξη ακρίβειας</u> της μεθόδου.

Σκοπός μας είναι αυτός ο αριθμός p να είναι όσο πιο μεγάλος γίνεται.

Στη μέθοδο του μέσου $\delta_n = O(h^3)$ επομένως η τάξη ακρίβειας θα είναι 2.

Παράδειγμα: Ας θεωρήσουμε τη μέθοδο

$$y_{n+2} + 4y_{n+1} - 5y_n = h\left(4f_{n+1} + 2f_n\right)$$

Ποια είναι η τάξη ακρίβειας;

$$\delta_n = y(t_{n+2}) + 4y(t_{n+1}) - 5y(t_n) - h\Big(4\underbrace{f(t_{n+1}, y(t_{n+1}))}_{y'(t_{n+1})} + 2\underbrace{f(t_n, y(t_n))}_{y'(t_n)}\Big)$$

$$y(t_{n+2}) = y(t_n) + 2h y'(t_n) + \frac{(2h)^2}{2} y''(t_n) + \frac{8h^3}{3!} y'''(t_n) + \frac{16h^4}{4!} y^{(4)}(t_n) + O(h^5)$$

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + h y'(t_n) + \frac{h^2}{2} y''(t_n) + \frac{h^3}{3!} y'''(t_n) + \frac{h^4}{4!} y^{(4)}(t_n) + O(h^5)$$

$$y'(t_{n+1}) = y'(t_n) + h y''(t_n) + \frac{h^2}{2} y'''(t_n) + \frac{h^3}{3!} y^{(4)}(t_n) + O(h^4)$$

$$\delta_n = y(t_{n+2}) + 4y(t_{n+1}) - 5y(t_n) - h4y'(t_{n+1}) - 2hy'(t_n)$$

$$= \overset{0}{\cancel{(1+4-5)}} y(t_n) + \cancel{(2h+4h)} y'(t_n) + \cancel{(2h^2+2h^2)} y''(t_n) + \cancel{\left(\frac{8}{6}h^3 + \frac{4}{6}h^3\right)} y'''(t_n)$$

$$+ \left(\frac{8}{6}h^4 + \frac{1}{6}h^4\right) y^{(4)}(t_n) + O(h^5) \cancel{-(4h+2h)} y'(t_n) \cancel{-4h^2} y''(t_n) \cancel{-2h^3} y'''(t_n) - \frac{h^4}{6} y^{(4)}(t_n)$$

$$= \left(\frac{3}{2}h^4 - \frac{1}{6}h^4\right) y^{(4)}(t_n) + O(h^5) = O(h^4) \Rightarrow \text{Η τάξη ακρίβειας είναι } \underline{\underline{3}}$$

Ορισμός : Μια μέθοδος θα καλείται <u>συνεπής</u> αν η τάξη ακριβείας είναι $p \geq 1$.

Οι μέθοδοι Euler, Πίσω-Euler, Τραπεζίου, μέσου είναι συνεπείς μέθοδοι.

Χρειαζόμαστε το $\delta_n = O(h^{1+1})$

Παρατήρηση : Το τοπικό σφάλμα διακριτοποίησης

$$\delta_n = O(h^{1+1}) \quad (\text{τουλάχιστον } 2)$$