Διβηματική μέθοδο.

$$\underline{a_2}\, y_{n+2} + a_1 y_{n+1} + a_0 y_n = h(\beta_2 f_{n+2} + \beta_1 f_{n+1} + \beta_0 f_n)$$

Τοπικό σφάλμα διακριτοποίησης

$$\delta_n = a_2 y(t_{n+2}) + a_1 y(t_{n+1}) + a_0 y(t_n) - h\Big(\beta_2 \overbrace{f(t_{n+2}, y(t_{n+2}))}^{y'(t_{n+2})} + \beta_1 \overbrace{f(t_{n+1}, y_{n+1})}^{y'(t_{n+1})} + \beta_0 \overbrace{f(t_n, y_n)}^{y'(t_n)}\Big)$$

$$= O(h^{p+1}) \quad , \quad p = \text{τάξη ακρίβειας.}$$

Συνεπής αν $\underline{p \geq 1}$.

Θεωρούμε για ευκολία ότι $\underline{\underline{a_2 = 1}}$

Τι πρέπει να ισχύει ώστε μια δι-βηματική μέθοδος να είναι συνεπής (; )

$$\delta_n = O(h^{\underline{\underline{l+1}}})$$

<u>τουλάχιστον</u>

$$y(t_{n+2}) = y(t_n) + 2h y'(t_n) + (2h)^2 \frac{1}{2} y''(t_n) + O(h^3)$$

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + h y'(t_n) + h^2 \frac{1}{2} y''(t_n) + O(h^3)$$

$$y'(t_{n+2}) = y'(t_n) + 2h y''(t_n) + O(h^2)$$

$$y'(t_{n+1}) = y'(t_n) + h y''(t_n) + O(h^2)$$

$$\delta_n = y(t_{n+2}) + \alpha_1 y(t_{n+1}) + \alpha_0 y(t_n) - h\left(\beta_2 y'(t_{n+2}) + \beta_1 y'(t_{n+1}) + \beta_0 y'(t_n)\right)$$

$$= y(t_n) + 2h y'(t_n) + \underline{2h^2} y''(t_n) + O(h^3)$$

$$\alpha_1 y(t_n) + \alpha_1 h y'(t_n) + \underline{\alpha_1 h^2 \tfrac{1}{2}} y''(t_n) + O(h^3)$$

$$+\alpha_0 y(t_n)$$

$$-h\left(\beta_2 y'(t_n) + 2\beta_2 h y''(t_n) + O(h^2)\right)$$

$$-h\left(\beta_1 y'(t_n) + \beta_1 h y''(t_n) + O(h^2)\right)$$

$$-h\beta_0 y'(t_n)$$

$$= \underline{(1+\alpha_1+\alpha_0)} y(t_n) + h\underline{(2+\alpha_1-\beta_2-\beta_1-\beta_0)} y'(t_n) + \underline{O(h^2)}$$

Επομένως για να είναι $\delta_n = O(h^2)$

αρκεί $\begin{cases} 1+a_1+a_0=0 \\ 2+a_1-\beta_0-\beta_1-\beta_2=0 \end{cases}$

Για τη συνέπεια μιας διβηματικής μεθόδου αρκεί να ικανοποιούνται οι παραπάνω συνθήκες.

Διβηματικές μέθοδοι.

Μέσου : $y_{n+2} - y_n = 2hf_{n+1}$.

Είναι συνεπής $\quad a_2 = 1,\ a_1 = 0,\ a_0 = -1,\ \beta_2 = 0,\ \beta_1 = 2,\ \beta_0 = 0.$

$$\begin{cases} 1 + a_1 + a_0 = 1 + 0 - 1 = 0 \checkmark \\ 2 + a_1 - (\beta_2 + \beta_1 + \beta_0) = 2 + 0 - (0 + 2 + 0) = 0 \checkmark \end{cases}$$

Άρα η μέθοδος του μέσου είναι συνεπής

Simpson : $y_{n+2} - y_n = h\left(\frac{1}{3} f_{n+2} + 4\frac{1}{3} f_{n+1} + \frac{1}{3} f_n\right)$

$$a_2 = 1,\ a_1 = 0,\ a_0 = -1,\ \beta_2 = \frac{1}{3},\ \beta_1 = \frac{4}{3},\ \beta_0 = \frac{1}{3}.$$

$$1 + a_1 + a_0 = 1 + 0 - 1 = 0 \checkmark$$

$$2 + a_1 - (\beta_0 + \beta_1 + \beta_2) = 2 - \left(1/3 + 4/3 + 1/3\right) = 2 - 6/3 = 0 \checkmark$$

$AB(2)$ : $y_{n+2} - y_{n+1} = h\left(\frac{3}{2} f_{n+1} - \frac{1}{2} f_n\right)$

$a_2 = 1$, $a_1 = -1$, $a_0 = 0$, $\beta_2 = 0$, $\beta_1 = 3/2$, $\beta_0 = -1/2$

$1 + a_1 + a_0 = 1 - 1 + 0 = 0$ ✓

$2 + a_1 - (\beta_2 + \beta_1 + \beta_0) = 2 - 1 - (0 + 3/2 - 1/2) = 1 - (2/2) = 0$ ✓

Πολυβηματικές ή (κ-βηματικές) μέθοδοι.

Μορφή της μεθόδου.

$$y_{n+k} + a_{k-1} y_{n+k-1} + a_{k-2} y_{n+k-2} + \dots + a_1 y_{n+1} + a_0 y_n$$
$$= h\left(\beta_k f_{n+k} + \beta_{k-1} f_{n+k-1} + \dots + \beta_1 f_{n+1} + \beta_0 f_n\right), \quad k \geq 1.$$

Για να είναι μια κ-βηματική μέθοδος.

$|a_0| + |\beta_0| \neq 0.$

$$f_{n+j} \equiv f(t_{n+j}, y_{n+j}), \quad j = 0, \dots, k.$$

$\beta_k \neq 0$ τότε η μέθοδος είναι πεπλεγμένη.

$\beta_k = 0$ τότε η μέθοδος είναι άμεση.

**Π.Α.Τ.**

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & a \leq t \leq b \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

Αν έχουμε κ-αρχικές προσεγγίσεις στα $t_0, t_1, \dots, t_{k-1}$, $y_0, y_1, \dots, y_{k-1}$ τότε με μια κ-βηματική μέθοδο κατασκευάζουμε την $y_k$ προσέγγιση και επαναλαμβάνουμε με αυτή τη μέθοδο για να πάρουμε τις υπόλοιπες προσεγγίσεις μέχρι την $y_N$.

Τάξη ακρίβειας (τοπικό σφάλμα διακριτοποίησης)

$$\delta_n = y(t_{n+k}) + a_{k-1} y(t_{n+k-1}) + \dots + a_0 y(t_n)$$
$$- h\left(\beta_k y'(t_{n+k}) + \beta_{k-1} y'(t_{n+k-1}) + \dots + \beta_1 y'(t_{n+1}) + \beta_0 y'(t_n)\right)$$
$$= O(h^{p+1})$$

, $p$ τάξη ακρίβειας ($p \geq 1$ η μέθοδος είναι συνεπής)

Ισχύει:

$$\delta_n = C_0 y(t_n) + C_1 h y'(t_n) + \dots \qquad + O(h^{p+1})$$

$$C_0 = 0, \; C_1 = 0, \; C_2 = 0$$

$$C_0 = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{k-1} + 1$$

$$C_1 = a_1 + 2a_2 + \dots + (k-1)a_{k-1} + k - (\beta_0 + \dots + \beta_k)$$

$$C_j = \frac{1}{j!}\left(a_1 + 2^j a_2 + 3^j a_3 + \dots + k^j\right) - \frac{1}{(j-1)!}\left(\beta_1 + 2^{j-1}\beta_2 + \dots + k^{j-1}\beta_k\right), \quad j \geq 2.$$

Μέσου : $y_{n+2} - y_n = 2h f_{n+1}$

$$a_2 = 1,\ a_1 = 0,\ a_0 = -1,\ \beta_2 = 0,\ \beta_1 = 2,\ \beta_0 = 0$$

$C_0 = 0,\ C_1 = 0$ (Συνεπής)

$$C_2 = \frac{1}{2!}\left(a_1 + 2^2 a_2\right) - \frac{1}{1!}\left(\beta_1 + 2^1 \beta_2\right) = \frac{1}{2}(0+4) - 1(2+0) = 2 - 2 = 0$$

$$C_3 = \frac{1}{3!}\left(a_1 + 2^3 a_2\right) - \frac{1}{2!}\left(\beta_1 + 2^2 \beta_2\right) = \frac{1}{6}(0+8) - \frac{1}{2}(2) = 8/6 - 1 \neq 0$$

$$\delta_n = C_0 y(t_n) + C_1 h y'(t_n) + C_2 h^2 y''(t_n) + C_3 h^3 y'''(t_n) + \dots$$

$= O(h^3)$, τάξη ακρίβειας είναι $\underline{\underline{p=2}}$