Πολυβηματική μέθοδος (k-βηματική)

$$a_k y_{n+k} + \dots + a_1 y_{n+1} + a_0 y_n = h\left(\beta_k f_{n+k} + \dots + \beta_1 f_{n+1} + \beta_0 f_n\right)$$

$\underline{a_k = 1}$, $|a_0| + |\beta_0| \neq 0$, $f_{n+j} \equiv f(t_{n+j}, y_{n+j})$

$\beta_k = 0 \Rightarrow$ άμεση μέθοδος , $\beta_k \neq 0 \Rightarrow$ πεπλεγμένη μέθοδος.

<u>Ορισμός</u>: $\rho(z) = a_k z^k + a_{k-1} z^{k-1} + \dots + a_1 z + a_0$, $\rho \in \mathbb{P}_k$.

$\sigma(z) = \beta_k z^k + \dots + \beta_1 z + \beta_0$, $\sigma \in \mathbb{P}_k$.

Τάξη - ακρίβειας   γ μορφή του ΠΑΤ.

$$a_k y(t_{n+k}) + \dots + a_1 y(t_{n+1}) + a_0 y(t_n) - h\Big(\beta_k \underbrace{f(t_{n+k}, y(t_{n+k}))}_{y'(t_{n+k})} + \dots + \beta_0 \underbrace{f(t_n, y(t_n))}_{y'(t_n)}\Big)$$

$$= O(h^{p+1})$$

p : τάξη ακρίβειας , $\underline{p \geq 1}$ $\Rightarrow$ η μέθοδος συνεπής

$(a_k = 1)$

$$C_0 = a_k + a_{k-1} + \dots + a_1 + a_0 = 0.$$

$$C_1 = k a_k + (k-1) a_{k-1} + \dots + 2a_2 + a_1 - (\beta_k + \dots + \beta_1 + \beta_0) = 0$$

Άρα $C_0 = C_1 = 0$ (για να είναι συνεπής)

$$C_0 = \rho(1), \quad C_1 = \rho'(1) - \sigma(1)$$

Παράδειγμα.

$$y_{n+2} + 4y_{n+1} - 5y_n = h(4f_{n+1} + 2f_n)$$

Είναι συνεπής;

Αν y λύση ΠΑΤ, $y(t_{n+2}) + 4y(t_{n+1}) - 5y(t_n) - h\left(4y'(t_{n+1}) + 2y'(t_n)\right) = O(h^2)$

$C_0 = \rho(1)$, $C_1 = \rho'(1) - \sigma(1)$.

$\rho(z) = z^2 + 4z - 5$, $\rho'(z) = 2z + 4$, $\sigma(z) = 4z + 2$

$\rho(1) = 1 + 4 - 5 = 0$, $\rho'(1) = 2 + 4 = 6$, $\sigma(1) = 4 + 2 = 6$.

$\rho(1) = 0$, $\rho'(1) - \sigma(1) = 0$ $\Rightarrow$ η μέθοδος είναι συνεπής

Για μέθοδος $y_{n+2} + 4y_{n+1} - 5y_n = h(4f_{n+1} + 2f_n)$

ποια είναι η τάξη ακρίβειας;

$C_0 = C_1 = 0, \quad C_2 = (2^2 \cdot 1 + 1^2 \cdot 4)\frac{1}{2!} - \frac{1}{1!}(1^1 \cdot 4) = (4+4)\cdot\frac{1}{2} - 4 = 0$

$C_3 = \frac{1}{3!}(2^3 \cdot 1 + 1^3 \cdot 4) - \frac{1}{2!}(1^2 \, 4) = \frac{1}{6}(8+4) - \frac{4}{2} = 2 - 2 = 0$

$C_4 = \frac{1}{4!}(2^4 + 4) - \frac{1}{3!}(4) = \frac{1}{24}(16+4) - \frac{1}{6}4 = \frac{20}{24} - \frac{4}{6} \neq 0$

$C_0 = C_1 = C_2 = C_3 = 0$ και $C_4 \neq 0$.

Το τοπικό σφάλμα διακριτοποίησης $\delta_n = O(h^4)$ δηλ. η τάξη ακρίβειας είναι $p=3$.

Άσκηση: Βρείτε τις 1-βηματικές μεθόδους ώστε να έχουν τάξη ακρίβειας 1.

$$a_1 y_{n+1} + a_0 y_n = h(\beta_1 f_{n+1} + \beta_0 f_n)$$

$a_1 = 1$. $\quad C_0 = C_1 = 0, \quad C_2 \neq 0.$

Θέλουμε το τοπικό σφάλμα διακριτοποίησης $\delta_n = O(h^2)$

$C_0 = \rho(1)$, $\quad \rho(z) = a_1 z + a_0$, $\quad \rho(1) = a_1 + a_0 = 0 \Rightarrow 1 + a_0 = 0 \Rightarrow a_0 = -1$

$C_1 = \rho'(1) - \sigma(1) \quad \sigma(z) = \beta_1 z + \beta_0$ και $\rho'(z) = a_1$.

$\rho'(1) - \sigma(1) = a_1 - \beta_1 - \beta_0 = 0$ ή $1 = \beta_1 + \beta_0$.

Αν θέσουμε για $\vartheta \in \mathbb{R}$, $\beta_1 = \vartheta \Rightarrow \beta_0 = 1 - \vartheta$.

Οι Ι-ρητ αρχικές μέθοδοι.

$$y_{n+1} - y_n = h(\theta f_{n+1} + (1-\theta) f_n)$$

έχουν τάξη ακρίβειας $p=1$.

$\theta = 0$, $\quad y_{n+1} = y_n + h f_n$ (Άμεση Euler)

$\theta = 1$, $\quad y_{n+1} = y_n + h f_{n+1}$ (Πεπλεγμένη Euler)

$\theta = 1/2$ $\quad y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f_n + f_{n+1})$ (Τραπεζίου)

Για τις 1-βηματικές μεθόδους η τάξη ακρίβειας είναι $p=2$.

$$C_0=C_1=C_2=0 \quad \& \quad \underline{C_3\neq 0}$$

$$y_{n+1}-y_n=h(\vartheta f_{n+1}+(1-\vartheta)f_n) \quad \text{ικανοποιούν} \quad C_0=C_1=0.$$

$$C_2=\frac{1}{2!}(1^2\cdot 1)-\frac{1}{1!}(1^1\cdot\vartheta)=\frac{1}{2}-\vartheta=0 \Rightarrow \underline{\underline{\vartheta=1/2}}.$$

Η μόνη μέθοδος η οποία έχει $p=2$. είναι η τραπεζίου.

Άσκηση

Προσδιορίστε τους συντελεστές της 2-βηματικής μεθόδου

$$y_{n+2} + a_0 y_n = h(\beta_1 f_{n+1} + \beta_0 f_n)$$

ώστε να έχει τη μεγαλύτερη τάξη ακρίβειας.

$$C_0 = C_1 = \dots = C_p = 0, \quad C_{p+1} \neq 0.$$

$$C_0 = 1 + a_0 = 0 \Rightarrow a_0 = -1$$

$$C_1 = 2 - (\beta_1 + \beta_0) = 0 \Rightarrow \beta_1 + \beta_0 = 2.$$

$$C_2 = \frac{1}{2!}(2^2 \cdot 1) - \frac{1}{1!}(\beta_1) = \frac{4}{2} - \beta_1 = 0 \Rightarrow \beta_1 = 2.$$

οπότε $\beta_0 = 0$.

Πρόκειται για τη μέθοδο $y_{n+2} - y_n = 2hf_{n+1}$ (Μέσου)

$$C_3 = \frac{1}{3!}(2^3) - \frac{1}{2!}(1^2 \cdot 2) = \frac{1}{6} \cdot 8 - 1 \neq 0.$$

Η μοναδικη μεθοδος με ταξη ακριβειας $p=2$

Ειναι η μεθοδος του <u>μεσου</u>.