Άσκηση 1) $y_{n+2} - y_n = \frac{1}{4} h (3 f_{n+1} - f_n)$

Είναι συνεπής;

Αρκεί $C_0 = C_1 = 0$

Οι συντελεστές της μεθόδου $a_2 = 1$, $a_1 = 0$, $a_0 = -1$, $\beta_2 = 0$, $\beta_1 = 3/4$, $\beta_0 = -1/4$

$C_0 = a_2 + a_1 + a_0 = 1 + 0 - 1 = 0$

$C_1 = 2a_2 + a_1 - (\beta_2 + \beta_1 + \beta_0) = 2 - (3/4 - 1/4) = 2 - 1/2 \neq 0$

Η μέθοδος δεν είναι συνεπής.

Το τοπικό σφάλμα διακριτοποίησης είναι $\delta_n = O(h^1)$

2) Τι τιμή πρέπει να έχουν οι παράμετροι α και b ώστε οι ακόλουθες μέθοδοι να είναι συνεπείς

α) $y_{n+2} - \alpha y_{n+1} - 2y_n = h\beta f_n$

b) $y_{n+2} + y_{n+1} + \alpha y_n = h(f_{n+2} + b f_n)$

α) $a_2 = 1, \quad a_1 = -\alpha, \quad a_0 = -2, \quad \beta_2 = 0, \quad \beta_1 = 0, \quad \beta_0 = \beta$

$$\rho(z) = z^2 - \alpha z - 2, \quad \sigma(z) = \beta$$

$$\rho'(z) = 2z - \alpha$$

$$C_0 = \rho(1) = 1 - \alpha - 2 = -1 - \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = -1$$

$$C_1 = \rho'(1) - \sigma(1) = 2 - \alpha - \beta = 2 + 1 - \beta = 0 \Rightarrow \beta = 3$$

b) $a_2 = 1$, $a_1 = 1$, $a_0 = \alpha$, $b_2 = 1$, $b_1 = \beta$

$\rho(z) = z^2 + z + \alpha$, $\rho'(z) = 2z + 1$, $\sigma(z) = z^2 + \beta$

$C_0 = \rho(1) = 1 + 1 + \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = -2$.

$C_1 = \rho'(1) - \sigma(1) = 2 + 1 - (1 + \beta) = 2 - \beta = 0 \Rightarrow \beta = 2$.

3) Δείξτε ότι η μονοβηματική μέθοδος

$$y_{n+1} = y_n + 2h f_n$$

δεν είναι συνεπής. Στη συνέχεια χρησιμοποιήστε τη μέθοδο για να "λύσετε" το ΠΑΤ.

$$\begin{cases} y'(t) = 1, & t \in (0,1), \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Δείξτε ότι η μέθοδος δεν είναι συγκλίνουσα.

$a_1 = 1, \ a_0 = -1, \ \beta_1 = 0, \ \beta_0 = 2.$

$\rho(z) = z - 1, \ \rho'(z) = 1, \ \sigma(z) = 2.$

$C_0 = \rho(1) = 1 - 1 = 0$ ✓, $C_1 = \rho'(1) - \sigma(1) = 1 - 2 \neq 0.$

Η ακριβής λύση του ΠΑΤ $y'(t)=1$, $y(0)=0$ είναι η $\underline{y(t)=t}$.

Έστω $t_n = nh$, $n=0,1,\dots,N$, $h=\frac{1}{N}$

Θέλουμε να βρούμε τη προσέγγιση $y_N \approx y(t_N) = y(1)$

Αν δείξουμε ότι $h\to 0$ το σφάλμα $y_N - y(t_N)$ δεν πάει στο 0 τότε δεν έχουμε σύγκλιση της μεθόδου.

$y_0=0$, $y_1 = y_0 + 2h \cdot 1 = 2h$, $y_2 = y_1 + 2h = 4h$

Επαγωγική υπόθεση $y_n = 2nh$,

τότε $y_{n+1} = y_n + 2h = 2nh + 2h = 2(n+1)h$

Επομένως $y_n = 2nh$, $n=0,1,2,\dots,N$.

$y_N = 2N \cdot h = 2$

Αρα $y_N - y(t_N) = 2 - t_N = 2 - 1 = \underline{\underline{1}}$

Για καθε h η διαφορα $y_N - y(t_N) = 1 \not\to 0$.

Αρα η μεθοδος δεν ειναι συγκλινουσα.

1) Να καθορίσετε την τάξη ακρίβειας της μεθόδου

$$3y_{n+2} - 4y_{n+1} + y_n = 2h f_{n+2}$$

$a_2 = 3$, $a_1 = -4$, $a_0 = 1$, $\beta_2 = 2$, $\beta_1 = 0$, $\beta_0 = 0$

$\rho(z) = 3z^2 - 4z + 1$, $\rho'(z) = 6z - 4$, $\sigma(z) = 2z^2$

$C_0 = C_1 = C_2 = \dots = C_p = 0$ και $C_{p+1} \neq 0$ p τάξη ακρίβειας.

$C_0 = \rho(1) = 3 - 4 + 1 = 0$, $C_1 = \rho'(1) - \sigma(1) = 6 - 4 - 2 = 0$.

$$C_j = \frac{1}{j!}\left(2^j a_2 + a_1\right) - \frac{1}{(j-1)!}\left(2^{j-1}\beta_2 + \beta_1\right)$$

$$C_2 = \frac{1}{2!}\left(2^2 \cdot 3 - 4\right) - 1\,(2 \cdot 2) = \frac{1}{2}(12 - 4) - 4 = 4 - 4 = 0$$

$$c_3 = \frac{1}{3!}\left(2^3 \cdot 3 - 4\right) - \frac{1}{2!}\left(2^2 \cdot 2\right)$$

$$= \frac{1}{6}\left(24 - 4\right) - \frac{1}{2}\left(8\right) = \frac{20}{6} - 4 \neq 0.$$

Άρα $\underline{\underline{p = 2}}$.

5) Προσδιορίστε τη διβηματική μέθοδο της μορφής

$$y_{n+2} + a_1 y_{n+1} - a y_n = h \beta_2 f_{n+2}$$

η οποία να είναι συνεπής και να βρείτε τις τιμές των παραμέτρων για να έχει τη μέγιστη δυνατή τάξη ακρίβειας.

Συνεπής $\Rightarrow \quad C_0 = C_1 = 0$.

$$\rho(z) = z^2 + a_1 z - a, \quad \rho'(z) = 2z + a_1, \quad \sigma(z) = \beta_2 z^2$$

$$\left.\begin{aligned} C_0 &= \rho(1) = 1 + a_1 - a = 0 \\ C_1 &= \rho'(1) - \sigma(1) = 2 + a_1 - \beta_2 = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} a_1 &= a - 1 \\ \beta_2 &= 2 + a_1 = 2 + a - 1 = a + 1 \end{aligned}$$

Άρα οι μέθοδοι $y_{n+2} + (a-1) y_{n+1} - a y_n = h(a+1) f_{n+2}$, $a \in \mathbb{R}$ είναι συνεπείς μέθοδοι.

$$C_2 = \frac{1}{2!}\left(2^2 a_2 + a_1\right) - \left(2\beta_2 + \beta_1\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(4 + a_1\right) - 2\beta_2 = \frac{1}{2}\left(4 + a - 1\right) - 2(a+1)$$

$$= 2 + \frac{a-1}{2} - 2a - 2 = \frac{a-1}{2} - 2a = \frac{a-1-4a}{2} = -\frac{3a+1}{2}$$

$$C_2 = 0 \Leftrightarrow 3a+1 = 0 \Leftrightarrow a = -1/3.$$

Η μεθοδος για $a = -1/3$ εχει τη μεγιστη ταξη ακριβειας.

$$C_3 = \frac{1}{3!}\left(2^3 + a_1\right) - \frac{1}{2!}\left(2^2 \beta_2\right) = \frac{1}{3!}\left(8 + a - 1\right) - \frac{4}{2}(a+1) = \frac{1}{6}\left(7 - \frac{1}{3}\right) - 2\left(1 - 1/3\right) \neq 0$$