k-βηματικές μέθοδοι

Γενική μορφή: $y_0, y_1, \dots y_{k-1}$ δεδομένα

$$a_k y_{n+k} + a_{k-1} y_{n+k-1} + \dots + a_1 y_{n+1} + a_0 y_n = h(\beta_k f_{n+k} + \dots + \beta_0 f_n) \quad , n=0,\dots,N-k.$$

$a_k = 1 \qquad |a_0| + |\beta_0| > 0$

Παραδείγματα: Άμεσες

Μέθοδοι Adams-Bashforth

$k=2$

$$y_{n+2} - y_{n+1} = h\left(\frac{3}{2} f_{n+1} - \frac{1}{2} f_n\right) \qquad AB2$$

$k=3$

$$y_{n+3} - y_{n+2} = h\left(\frac{23}{12} f_{n+2} - \frac{4}{3} f_{n+1} + \frac{5}{12} f_n\right) \qquad AB3$$

Πεπλεγμενες μεθοδοι

Adams-Moulton

$k=2$ $$y_{n+2} - y_{n+1} = h\left(\frac{5}{12} f_{n+2} + \frac{2}{3} f_{n+1} - \frac{1}{12} f_n\right) \qquad \text{AM2}$$

$k=3$ $$y_{n+3} - y_{n+2} = h\left(\frac{9}{24} f_{n+3} + \frac{19}{24} f_{n+2} - \frac{5}{24} f_{n+1} + \frac{1}{24} f_n\right) \qquad \text{AM3}$$

Μεθοδοι BDF (Αναδρομων διαφορών)

$k=1$ $$y_{n+1} - y_n = h f_{n+1}$$ (Πεπλεγμενη Euler)

$k=2$ $$y_{n+2} - \frac{4}{3} y_{n+1} + \frac{1}{3} y_n = h \frac{2}{3} f_{n+2}$$

$k=3$ $$y_{n+3} - \frac{18}{11} y_{n+2} + \frac{9}{11} y_{n+1} - \frac{2}{11} y_n = h \frac{6}{11} f_{n+3}$$

Τάξη ακρίβειας μιας μεθόδου προκύπτει από τοπικό σφάλμα διακριτοποίησης.

Αν η y είναι ομαλή λύση του ΠΑΤ

$$\delta_n = a_k y(t_{n+k}) + \dots + a_0 y(t_n) - h\Big(\beta_k \underbrace{f(t_{n+k}, y(t_{n+k}))}_{y'(t_{n+k})} + \dots + \beta_0 f(t_n, y(t_n))\Big)$$

$$= O(h^{p+1}) \quad , \; p: \text{τάξη ακρίβειας της μεθόδου}$$

Συνέπεια: $p \geq 1$ τότε η μέθοδος λέγεται συνεπής.

AM2 : Είναι συνεπής.

$$\rho(z) = a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = z^2 - z \quad , \; \rho'(z) = 2z - 1.$$

$$\sigma(z) = \frac{5}{12} z^2 + \frac{2}{3} z - \frac{1}{12} \, ,$$

$$\rho(1) = 0, \; \rho'(1) - \sigma(1) = 1 - \left(\frac{5}{12} + \frac{2}{3} - \frac{1}{12}\right) = 0$$

Σmv AM2

$$C_2 = \frac{1}{2!}(2^2 a_2 + a_1) - 1\cdot(2\beta_2 + \beta_1)$$

$$= \frac{1}{2}(4\cdot 1 - 1) - \left(2\cdot\frac{5}{12} + \frac{2}{3}\right) = \frac{3}{2} - \left(\frac{5}{6} + \frac{4}{6}\right) = 0$$

$$C_3 = \frac{1}{3!}(2^3 a_2 + a_1) - \frac{1}{2!}(2^2\beta_2 + \beta_1) = \frac{1}{6}(8\cdot 1 - 1) - \frac{1}{2}\left(4\cdot\frac{5}{12} + 2/3\right)$$

$$= \frac{7}{6} - \frac{1}{2}\left(\frac{5}{3} + 2/3\right) = 0$$

$$C_4 = \dots \neq 0.$$

$\delta_n = O(h^4)$ Η τάξη ακριβείας $p = 3$.

Ορισμός: (Συγκλίνουσα πολυβηματικής μεθόδου) Έστω $y_0, y_1, \dots, y_{k-1}$ τέτοιες προσεγγίσεις

$$\lim_{h \to 0} y_j = y_0 \, , \; j = 0, \dots, k-1$$

Έστω y_n είναι η προσέγγιση της $y(t_n)$ η οποία προκύπτει από την πολυβηματική μέθοδο. Λέμε ότι η μέθοδος συγκλίνουσα αν για κάθε $t \in [a, b]$

$$\lim y_n = y(t) \, , \quad h \to 0 \text{ και } n \to \infty \text{ έ.ω. } t_n = a + nh \to t$$

και αν αυτή ισχύει για κάθε ΠΑΤ όταν η f ικανοποιεί τη συνθήκη του Lipschitz ως προς τη δεύτερη μεταβλητή, τότε η μέθοδος καλείται συγκλίνουσα.