Ευσταθεια των πολυβηματικων μεθοδων

ΠΑΤ $\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & a \le t \le b \\ y(a) = y_0 \end{cases}$

Εστω κ-βηματικη μεθοδο

$$\begin{cases} a_k y_{n+k} + \dots + a_0 y_n = h\left(\beta_k f_{n+k} + \dots + \beta_0 f_n\right), \quad n = 0, \dots, N-k. \\ y_0, y_1, \dots, y_{k-1} \ \text{αρχικές τιμες} \end{cases}$$

$t_n = a + nh$, $n = 0, 1, 2, \dots, N$ και $h = \dfrac{b-a}{N}$.

<u>Ορισμός</u>: Μια κ-βηματική μέθοδος η οποία περιγράφεται από τις σταθερές $\alpha_k, \alpha_{k-1}, \dots, \alpha_0$, $\beta_k, \dots, \beta_0$ λέγεται ευσταθής αν υπάρχει σταθερά C που εξαρτάται από την f αλλά όχι από το N τέτοια ώστε για τις ακολουθίες (y_n) και (z_n) τέτοιες ώστε

$$\begin{cases} y_0, y_1, \dots, y_{k-1} \text{ δοσμένα} \\ \alpha_k y_{n+k} + \dots + \alpha_1 y_{n+1} + \alpha_0 y_n = h\left(\beta_k f(t_{n+k}, y_{n+k}) + \dots + \beta_0 f(t_n, y_n)\right), \quad n = 0, \dots, N-k \end{cases}$$

και

$$\begin{cases} z_0, z_1, \dots, z_{k-1} \text{ δοσμένα} \\ \alpha_k z_{n+k} + \dots + \alpha_0 z_n = h\left(\beta_k f(t_{n+k}, z_{n+k}) + \dots + \beta_0 f(t_n, z_n)\right), \quad n = 0, \dots, N-k \end{cases}$$

να ισχύει

$$\max_{0 \le n \le N} |y_n - z_n| \le C \max_{0 \le j \le k-1} |y_j - z_j|$$

Ορισμος : (Συνθηκη των ριζων). Λεμε οτι η πολυβηματικη μεθοδος πληροί τη συνθηκη των ριζων αν για το χαρακτηριστικό πολυωνυμο ρ

$$\rho(z) = a_k z^k + \dots + a_1 z + a_0$$ ισχυει οτι

i) $\rho(z) = 0 \Rightarrow |z| \leq 1$

ii) $\rho(z) = \rho'(z) = 0 \Rightarrow |z| < 1$.

Παρατηρηση : Οι ριζες ενος πολυωνυμου μπορει να μιγαδικες, $z \in \mathbb{C}$.

$|z| \leq 1$ (μετρο του μιγαδικού z να ειναι μικροτερο 1)

Ομογενείς εξισώσεις (γραμμικές) διαφορών (με σταθερούς συντελεστές)

$$a_k y_{n+k} + a_{k-1} y_{n+k-1} + \dots + a_1 y_{n+1} + a_0 y_n = 0 \quad , n \geq 0$$

(y_n) ακολουθία αριθμών ικανοποιεί την παραπάνω σχέση θα ονομάζεται λύση

Αν έχουμε 2 λύσεις, (y_n^1), (y_n^2) τότε και γραμμικός συνδυασμός τους, $z_n = c_1 y_n^1 + c_2 y_n^2$ ικανοποιεί την εξίσωση.

$$a_k z_{n+k} + \dots + a_1 z_{n+1} + a_0 z_n = 0 \quad , \quad n \geq 0.$$

Ο χώρος των λύσεων θα είναι ένας γραμμικός χώρος.

Επίσης παρατηρούμε ότι αν $y_0, y_1, \ldots, y_{k-1}$ δοσμένες τιμές τότε

η ακολουθία που ικανοποιεί την εξίσωση με αρχικές τιμές $y_0, \ldots y_{k-1}$ ορίζεται μοναδικά από την εξίσωση.

<u>Ορισμός</u>: Έστω ότι (y_n^j), $j = 1, 2, 3, \ldots, m$ είναι λύσεις της ομογενής εξίσωσης. Λέμε ότι είναι γραμμικά εξαρτημένες αν υπάρχουν σταθερές $c_1, c_2, \ldots, c_m \in \mathbb{C}$, όχι όλες μηδέν τέτοιες ώστε

$$c_1 y_n^1 + c_2 y_n^2 + \ldots + c_m y_n^m = 0 \quad , \quad n \geq 0.$$

Αν οι (y_n^j), $j = 1, \ldots, m$ δεν είναι γρ. εξαρτημένες θα καλούνται γρ. ανεξάρτητες.

Θεωρούμε τώρα τις εξής λύσεις.

y^1_n η ακολουθία που προκύπτει αν $y^1_0 = 1,\ y^1_1 = 0 = \dots = y^1_{k-1} = 0$

y^2_n — " — — $y^2_0 = 0,\ y^2_1 = 1,\ y^2_2 = 0 = \dots = y^2_{k-1} = 0$

$\vdots$

y^k_n — " — $y^k_0 = \dots = y^k_{k-2} = 0,\ y^k_{k-1} = 1.$

Είναι προφανές ότι (y^j_n) που ορίσαμε θα είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.

Επίσης έχουμε ότι αν έχω μια λύση z_n της ομογενούς εξίσωσης.

$z_0, z_1, \dots, z_{k-1}$ αρχικές τιμές.

$$z_n = z_0 \cdot y_n^1 + z_1 y_n^2 + \dots + z_{k-1} y_n^k \quad , \quad n \geq 0$$

Έχουν τις ίδιες πρώτες k-συνιστώσες ίδιες $\Rightarrow$ προκύπτει εύκολα ότι οι λύσεις συμπίπτουν.

Καταλαβαίνουμε ότι η διάσταση του χώρου των λύσεων είναι k.

Κάθε βάση του χώρου των λύσεων της ομογενούς εξίσωσης λέγεται <u>Θεμελιώδες σύστημα</u> της ομογ. εξίσωσης

Ας θεωρήσουμε $\rho(z) = a_k z^k + \dots + a_1 z + a_0$

Οι ρίζες του ρ θα είναι διάφορες του μηδενός $(a_0 \neq 0)$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι <u>$a_0 \neq 0, a_k \neq 0$</u>

Εστω $z \neq 0$ ρίζα του ρ, $\rho(z) = 0$.

Επομένως $a_k z^k + a_{k-1} z^{k-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0$.

Θεωρώ την ακολουθία $y_n = (z)^n$, $n = 0, 1, 2, \dots$

Είναι η ακολουθία y_n λύση της ομογενούς εξίσωσης.

Ικανοποιεί τη σχέση

$$a_k y_{n+k} + \dots + a_0 y_n = 0 \quad , \quad n \geq 0. \qquad (?)$$

Εχουμε

$$a_k z^{n+k} + a_{k-1} z^{n+k-1} + \dots + a_1 z^{n+1} + a_0 z^n$$

$$= z^n (a_k z^k + \dots + a_1 z + a_0) = z^n \rho(z) = 0 \qquad \checkmark$$

1η) Το $p \in \mathbb{P}_k$ έχει k διαφορετικές ανά 2 ρίζες.

Ονομάζουμε $z_1, \dots, z_k$ τις ρίζες του p

Τότε προκύπτει ότι οι ακολουθίες $y_n^j = (z_j)^n$ αυτές αποτελούν θεμελιώδες σύστημα για την ομογενή εξίσωση.

2η) Το p έχει ρίζες με πολ/τητα μεγαλύτερη του 1.

Έστω ότι z είναι ρίζα του p με πολ/τητα ν

$y_n^1 = (z)^n$

$y_n^2 = n(z)^n$

$y_n^3 = n(n-1)z^n$, ..., $y_n^\nu = n(n-1)\dots(n-\nu+2)z^n$

$\nu \geq 2$, $\rho(z) = \rho'(z) = 0$

$y^1_n = z^n$ λυση της αμογενους εξισωσης

$y^2_n = n(z)^n$ ✓

$$a_k y^2_{n+k} + \dots + a_1 y^2_{n+1} + a_0 y^2_n$$

$$= a_k (n+k) z^{n+k} + \dots + a_1 (n+1) z^{n+1} + a_0 \cdot n z^n$$

$$= n z^n \Big(\underbrace{a_k z^k + a_{k-1} z^{k-1} + \dots + a_1 z + a_0}_{\substack{\rho(z) \\ \| \\ 0}} \Big) + z^{n+1} \Big(\underbrace{k a_k z^{k-1} + \dots + a_1}_{\substack{\rho'(z) \\ \| \\ 0}} \Big)$$

Έστω ότι $z_1,\dots,z_m$, $m<k$ ρίζες του ρ διαφορετικές ανά 2 και $p_1,\dots,p_m$ οι πολλαπλότητες

Οι ακολουθίες

$$y_n^1 = z_1^n$$

$$y_n^2 = n z_1^n$$

$$\vdots$$

$$y_n^{p_1} = n(n-1)\dots(n-p_1+2)z_1^n$$

$$y_n^{p_1+1} = z_2^n$$

$$\vdots$$

$$y_n^{p_1+p_2} = n(n-1)\dots(n-p_2+2)z_2^n$$

$$\vdots$$

$$y_n^k = n(n-1)\dots(n-p_m+2)z_m^n$$

Θεμελιώδες σύστημα λύσεων της ομογενούς.