Ευστάθεια των πολυβηματικών μεθόδων

ΠΑΤ $\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & a \le t \le b \\ y(a) = y_0 \end{cases}$

Έστω κ-βηματική μέθοδο

$$\begin{cases} a_k y_{n+k} + \dots + a_0 y_n = h(\beta_k f_{n+k} + \dots + \beta_0 f_n), \quad n = 0, \dots, N-k \\ y_0, y_1, \dots, y_{k-1} \quad \text{αρχικές τιμές} \end{cases}$$

$t_n = a + nh$, $n = 0, 1, 2, \ldots, N$ και $h = \frac{b-a}{N}$.

Ορισμός: Μια k-βηματική μέθοδος η οποία περιγράφεται από τις σταθερές $\alpha_k, \alpha_{k-1}, \ldots, \alpha_0$, $\beta_k, \ldots, \beta_0$ λέγεται ευσταθής αν υπάρχει σταθερά C που εξαρτάται από την f αλλά όχι από το N τέτοια ώστε για τις ακολουθίες (y_n) και (z_n) τέτοιες ώστε

$$\begin{cases} y_0, y_1, \ldots, y_{k-1} \text{ δοσμένα} \\ \alpha_k y_{n+k} + \ldots + \alpha_1 y_{n+1} + \alpha_0 y_n = h\left(\beta_k f(t_{n+k}, y_{n+k}) + \ldots + \beta_0 f(t_n, y_n)\right), \quad n = 0, \ldots, N-k \end{cases}$$

και

$$\begin{cases} z_0, z_1, \ldots, z_{k-1} \text{ δοσμένα} \\ \alpha_k z_{n+k} + \ldots + \alpha_0 z_n = h\left(\beta_k f(t_{n+k}, z_{n+k}) + \ldots + \beta_0 f(t_n, z_n)\right), \quad n = 0, \ldots, N-k \end{cases}$$

να ισχύει

$$\max_{0 \le n \le N} |y_n - z_n| \le C \max_{0 \le j \le k-1} |y_j - z_j|$$

Ορισμός: (Συνθήκη των ριζών). Λέμε ότι η πολυβηματική μέθοδος πληροί τη συνθήκη των ριζών αν για το χαρακτηριστικό πολυώνυμο ρ

$$\rho(z) = a_k z^k + \dots + a_1 z + a_0 \quad \text{ισχύει ότι}$$

i) $\rho(z) = 0 \Rightarrow |z| \leq 1$

ii) $\rho(z) = \rho'(z) = 0 \Rightarrow |z| < 1$.

Παρατήρηση: Οι ρίζες ενός πολυωνύμου μπορεί να μιγαδικές, $z \in \mathbb{C}$.

$|z| \leq 1$ (μέτρο του μιγαδικού z να είναι μικρότερο 1)

Πρόταση 1: Αν μια k-βηματική μέθοδος είναι ευσταθής τότε ικανοποιείται η συνθήκη των ριζών.

Πρόταση 2: Αν μια k-βηματική μέθοδος ικανοποιεί τη συνθήκη των ριζών τότε είναι ευσταθής.

Πρόταση 2: Η απόδειξη παραλείπεται.

Απόδειξη Πρότασης 1: Έστω Π.Α.Τ.

$$\begin{cases} y'(t) = 0 & a \le t \le b \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

Έστω k-βηματική μέθοδος με συν/στές $a_k, \dots, a_1, a_0, \beta_k, \dots, \beta_1, \beta_0$ είναι ευσταθής.

Έστω y_n η ακολουθία που δίνει η μέθοδος για αρχικές τιμές $y_0, \ldots, y_{k-1}$

$$\alpha_k y_{n+k} + \alpha_{k-1} y_{n+k-1} + \ldots + \alpha_1 y_{n+1} + \alpha_0 y_n = 0$$

Έστω z_n η ακολουθία που δίνει η μέθοδος για αρχικές τιμές $z_0 = z_1 = \ldots = z_{k-1} = 0$

τότε $z_n = 0, \; n = 0, \ldots, N$

Αφού η μέθοδος είναι ευσταθής τότε θα ισχύει

$$\max_{0 \le n \le N} |y_n| \le C \max_{0 \le j \le k-1} |y_j|$$

Έστω $\rho(z) = a_k z^k + \dots + a_1 z + a_0$

και z ρίζα του ρ δηλαδή $\rho(z) = 0$.

Μπορώ να θεωρήσω $y_n = z^n$, $n = 0, 1, \dots, N$.

Εύκολα βλέπω ότι η $(y_n)_{n=0,\dots N}$ ικανοποιεί τη σχέση

$$a_k y_{n+k} + \dots + a_1 y_{n+1} + a_0 y_n = 0, \quad n = 0, \dots, N-k.$$

Συνεπώς από ευστάθεια προκύπτει

$$\max_{0 \le n \le N} |z^n| \le C \max_{0 \le j \le k-1} |z^j|, \quad C \text{ ανεξάρτητη του } z \text{ \& } N.$$

Αν είχα $|z| > 1$ τότε αναγκαστικά οδηγούμαστε σε άτοπο

Έστω ότι η z είναι πολλαπλή ρίζα $\rho(z)=\rho'(z)=0$.

Τότε μπορούμε να θεωρήσουμε $y_n = n z^n$, $n=0,\dots,N$.

Για αυτήν γνωρίζουμε από τη μελέτη των γραμμικών εξισώσεων διαφορών ότι

$$a_k y_{n+k} + \dots + a_1 y_{n+1} + a_0 y_n = 0 \quad , \quad n=0,\dots,N-k.$$

Άρα ισχύει από την ιδιότητα της ευστάθειας της μεθόδου ότι

$$\max_{0\le n\le N} |n z^n| \le C \max_{0\le j\le k-1} |j z^j|$$

Αν $|z|=1$, τότε είναι προφανές ότι οδηγούμαστε σε άτοπο.

Άρα τότε $|z|<1$