Ορισμός: (Συγκλίνουσα πολυβηματικής μεθόδου) Έστω $y_0, y_1, \dots, y_{k-1}$ τέτοιες προσεγγίσεις

$$\lim_{h \to 0} y_j = y_0 \ , \quad j = 0, \dots, k-1$$

Έστω y_n είναι η προσέγγιση της $y(t_n)$ η οποία προκύπτει από την πολυβηματική μέθοδο. Λέμε ότι η μέθοδος συγκλίνουσα αν για κάθε $t \in [a, b]$

$$\lim y_n = y(t) \ , \quad h \to 0 \text{ και } n \to \infty \quad \text{ε.ω. } t_n = a + nh \to t$$

και αν αυτό ισχύει για κάθε ΠΑΤ όταν η f ικανοποιεί τη συνθήκη του Lipschitz ως προς τη δεύτερη μεταβλητή, τότε η μέθοδος καλείται συγκλίνουσα.

Πρόταση : Κάθε συγκλίνουσα πολυβηματική μέθοδος είναι ευσταθής.

Απόδειξη: ευστάθεια πολυβηματικής μεθόδου $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \text{το χαρακτηριστικό πολυώνυμο } \rho \\ \text{ικανοποιεί τη συνθήκη των ριζών} \end{cases}$

$$\rho(z) = a_k z^k + \dots + a_1 z + a_0$$

Αν z ρίζα του ρ τότε $|z| \leq 1$ και αν $\rho'(z) = \rho(z) = 0$ τότε $|z| < 1$

Θεωρούμε ΠΑΤ $\begin{cases} y'(t) = 0 & 0 \leq t \leq T \\ y(0) = 0 \end{cases}$

Η $y(t) = 0$ στο $[0, T]$.

Αν $y_0, \dots, y_{k-1}$, $a_k y_{n+k} + \dots + a_0 y_n = 0$, τότε $y_N \xrightarrow{N \to \infty} y(T) = 0$, $h = \frac{T}{N}$

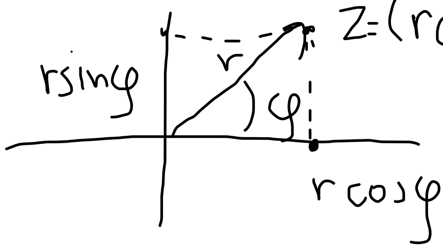
Έστω z ρίζα του ρ, $\rho(z)=0$.

$z = r e^{i\varphi}$, $r=|z|$, φ, $0 \leq \varphi < 2\pi$.

$= r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

$\underset{\sim}{\mathrm{Re}\,z}$ $\quad$ $\underset{\sim}{\mathrm{Im}\,z}$.

$z=(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$



y_n ορίζεται $\quad y_n = \underline{h\,\mathrm{Re}}(z^n) = h\,\mathrm{Re}\left(r e^{in\varphi}\right) = h\,r\cos(n\varphi)$

$\underline{y_0, y_1, \dots, y_{k-1}}$ δοσμένοι και $\underline{a_k y_{n+k} + \dots + a_0 y_n = 0}$.

διότι $\mathrm{Re}\big(\underbrace{\alpha_k z^{n+k} + \dots + \alpha_0 z^n}_{0}\big) = 0$

Άρα η y_n προκύπτει ως λύση με την πολυβηματική μέθοδο. Επομένως $y_j = h\,\mathrm{Re}(z^j) \xrightarrow{h\to 0} 0$, $j=0,\dots,k-1$. Άρα $y_N \to 0$, $h\to 0$, $N\to\infty$.

Αν $\varphi = 0$ ή $\varphi = \pi$ τότε z πραγματικός αριθμός

Συνεπώς $|y_N| = |z^N| = h \cdot |r|^N = \frac{T}{N} r^N \xrightarrow{N\to\infty} 0$, $r \le 1$.

Αν $\varphi \neq 0, \pi$ τότε $z \in \mathbb{C}$

$$(y_N)^2 - (y_{N+1})(y_{N-1}) = h^2 r^{2N} \cos^2(N\varphi) - h^2 r^{2N} \cos((N+1)\varphi) \cdot \cos((N-1)\varphi)$$

$$= h^2 r^{2N} [\underbrace{\cos^2(N\varphi) - \cos((N+1)\varphi)\cos((N-1)\varphi)}_{\sin^2(\varphi)}]$$

$$= h^2 r^{2N} \sin^2(\varphi)$$

$$\frac{y_N^2 - y_{N+1} y_{N-1}}{\sin^2(\varphi)} = h^2 r^{2N} \xrightarrow{N\to\infty} 0$$

Συνεπώς $h^2 r^{2N} = T^2 \left(\frac{r^N}{N}\right)^2 \to 0$, $N \to \infty$. Αναγκαστικά $|r| \le 1$.

Έστω z πολλαπλή ρίζα του ρ, $\rho(z)=\rho'(z)=0$.

$y_n = hn\,Re(z^n)$, $n \geq 0$, $y_n = hn\,r^n \cos(n\varphi)$

Εύκολα βλέπουμε ότι $y_0, y_1, \dots, y_{k-1} \to 0$, $h \to 0$.

και $\underline{a_k y_{n+k} + \dots + a_0 y_n} = Re\Big(\underbrace{a_k (n+k) z^{n+k} + \dots + a_0 (n) z^n}_{=0}\Big) = 0$

Επομένως λόγω σύγκλισης της μεθόδου $y_N \to 0$, $N \to \infty$, $h = \frac{T}{N}$.

Αν $\varphi = 0$ ή $\varphi = \pi$. $|y_N| = hN \cdot r^N = T \cdot r^N \to 0$, $N \to \infty$ Αναγκαστικά έχουμε $r < 1$.

Αν $\varphi \neq 0, \pi$ $x_n = \frac{1}{nh} y_n = Re(z^n) = r^n \cos(n\varphi)$

$$(x_N)^2 - (x_{N+1})(x_{N-1}) = r^{2N}\left(\cos^2(N\varphi) - \cos((N+1)\varphi)\cdot\cos((N-1)\varphi)\right)$$

$$= r^{2N}\sin^2\varphi.$$

$$\frac{(x_N)^2 - (x_{N+1})(x_{N-1})}{\sin^2\varphi} = r^{2N} \xrightarrow{N\to\infty} 0 \quad ;)$$

$$x_N = \frac{1}{Nh}\, y_N = \frac{1}{T}\, y_N \xrightarrow{N\to\infty} 0, \qquad x_{N-1}, x_{N+1} \to 0 \quad N\to\infty.$$

Этого $r < 1$.