Αν μια πολυβηματική μέθοδος είναι συγκλίνουσα $\Rightarrow$ είναι ευσταθής.

Αν — " — — " — $\Rightarrow$ είναι συνεπής

Συνεπής μέθοδος, τοπικό σφάλμα διακριτοποίησης $\delta_h = O(h^{p+1})$, $p \geq 1$

$$\left.\begin{aligned} C_0 &= a_k + a_{k-1} + \dots + a_0 = 0 \\ C_1 &= k a_k + \dots + a_1 - (\beta_k + \dots + \beta_1 + \beta_0) = 0 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho(1) = 0 \\ \rho'(1) - \sigma(1) = 0 \end{cases}$$

$$\rho(z) = a_k z^k + \dots + a_1 z + a_0, \quad \sigma(z) = \beta_k z^k + \dots + \beta_1 z + \beta_0.$$

**Πρόταση**: Αν μια πολυβηματική μέθοδος είναι συγκλίνουσα, τότε είναι συνεπής.

**Απόδειξη**: $c_0 = 0$, $\rho(1) = 0$.

Π.Α.Τ. $\begin{cases} y'(t) = 0 & 0 \le t \le T \\ y(0) = 1 \end{cases}$

Η $y(t) = 1$.

Υποθέτουμε $y_0, y_1, \dots, y_{k-1}$ είναι ίσες με $1$.

Επομένως λόγω της σύγκλισης της μεθόδου $y_n \to 1$, $h \to 0$

$a_k y_{n+k} + \dots + a_0 y_n = 0$, $n \geq 0$, άρα $y_0 = y_1 = \dots = y_{k-1} = 1$.

και $y_n \to 1$ $h \to 0$ Όποτε $a_k y_k + \dots + a_1 y_1 + a_0 y_0 = 0$

Επομένως $\quad a_k + a_{k-1} + \dots + a_1 + a_0 = 0.$

$c_1 = 0$, $\quad \rho'(1) - \sigma(1) = 0$ ή $\quad \rho'(1) = \sigma(1)$

Η μέθοδος είναι συγκλίνουσα $\Rightarrow$ είναι ευσταθής και ισχύει η συνθήκη των ριζών

Αν $z$ είναι ρίζα του $\rho$ τότε $|z| \leq 1$ και αν $z$ είναι και ρίζα της $\rho'$ τότε $|z| < 1$.

Αφού ισχύει η συνθήκη των ριζών $\Rightarrow \rho'(1) \neq 0.$

$$M = \frac{\sigma(1)}{\rho'(1)}$$

Έστω Π.Α.Τ. $\begin{cases} y'(t) = 1 & 0 \le t \le T \\ y(0) = 0 \end{cases}$

Η $y(t) = t$ είναι η λύση του Π.Α.Τ.

Επειδή η μέθοδος είναι συγκλίνουσα, αν $y_j \xrightarrow{h \to 0} 0 = y_0$, $j = 0, \dots, k-1$

τότε $y_n$ οι λύσεις της πολυβηματικής μεθόδου, $y_n \to t_n = y(t_n)$

$$y_N \xrightarrow{N \to \infty} T = y(T),$$

Έστω $y_n = nhM$, $n \geq 0$, $y_j \xrightarrow{h \to 0} 0$, $h = \frac{T}{N}$

$$a_k y_{n+k} + \dots + a_1 y_{n+1} + a_0 y_n = a_k (n+k)hM + \dots + a_1 (n+1) hM + a_0 \cdot (n) hM$$
$$= (a_k + \dots + a_1 + a_0) nhM + (a_k k + \dots + a_2 2 + a_1) hM$$

$$\underline{a_k y_{n+k} + \dots + a_0 y_n} = \rho(1) n h M + \rho'(1) h M = \rho'(1) h M = \rho'(1) h \cdot \frac{\sigma(1)}{\rho'(1)}$$

$$= h\sigma(1) = h(\underline{\beta_k + \beta_{k-1} + \dots + \beta_1 + \beta_0})$$

Η $(y_n)$ προκύπτει ως λύση της πολυβηματικής μεθόδου.

Άρα λόγω σύγκλισης της μεθόδου $y_N \to T$, $h \to 0$.

$$y_N = \underbrace{N \cdot h}_{} \cdot M = T \cdot M \longrightarrow T \qquad h \to 0$$

Οπότε $\underline{M = 1}$. Συνεπώς $\sigma(1) = \rho'(1)$