Αν κ-πολυβηματική μέθοδο συγκλίνουσα τότε αυτή είναι ευσταθής

Αν ΠΑΤ $\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & a \le t \le b \\ y(a) = y_0 \end{cases}$

$y_0, y_1, \dots, y_{k-1} \Rightarrow \{y_n\}$ τιμές που δίνει η κ-βηματική μέθοδο

$z_0, z_1, \dots, z_{k-1} \Rightarrow \{z_n\}$ — " —

$$\max_{0 \le n \le N} |y_n - z_n| \le C \max_{0 \le j \le k-1} |y_j - z_j|$$

Πρόταση (Ευστάθεια πολυβηματικών μεθόδων) (Butcher)

Έστω k-βηματική μέθοδος η οποία τηρεί τη συνθήκη των ριζών. Έστω λ_n, $n=0,\dots,N-k$ δεδομένες σταθερές και β_i^n, $i=0,\dots,k$, $n=0,\dots,N-k$ δεδομένες σταθερές με $|\beta_i^n| \le B < \infty$. Για $h=\frac{b-a}{N}$ θεωρούμε την εξίσωση

$$a_k \psi_{n+k} + \dots + a_0 \psi_n = h(\beta_k^n \psi_{n+k} + \dots + \beta_0^n \psi_n) + \lambda_n, \quad 0 \le n \le N-k$$

Τότε υπάρχει $h_0 > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $h \le h_0$ να ισχύει

$$\max_{0 \le n \le N} |\psi_n| \le C_1 \left[N \cdot \max_{0 \le n \le N-k} |\lambda_n| + \max_{0 \le j \le k-1} |\psi_j| \right]$$

όπου C εξαρτάται από το $b-a$, h_0, B αλλά είναι ανεξάρτητη των h, λ_n, ψ_n, N και β_i^n

Απόδειξη: Δεν θα την κάνουμε.

Αν κ-βηματική μέθοδος είναι συγκλίνουσα τότε είναι συνεπής.

Αν κ-βηματική μέθοδος είναι συγκλίνουσα $\Longrightarrow$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{είναι συνεπής} \iff (C_0 = C_1 = 0, \text{ χαρακτηριστικά πολυώνυμα}) \\ \text{είναι ευσταθής} \iff (\text{συνθήκη ριζών}) \end{array} \right\}$

$\Longleftarrow$ (?)

Θεώρημα: Έστω k-βηματική μέθοδος είναι ευσταθής και έχει τάξη ακρίβειας $p \geq 1$.
Έστω $y \in C^{p+1}[a,b]$ λύση του Π.Α.Τ.

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & a \leq t \leq b \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

με f να ικανοποιεί την "ομοιόμορφη" συνθήκη του Lipschitz. Τότε υπάρχει $h_0 > 0$ τ.ω. να ισχύει για κάθε $0 < h \leq h_0$

$$\max_{0 \leq n \leq N} |y(t_n) - y_n| \leq C \left[\max_{0 \leq j \leq k-1} |y(t_j) - y_j| + h^p \max_{a \leq t \leq b} |y^{(p+1)}(t)| \right]$$

με σταθερά C ανεξάρτητη των h, N, y.

Απόδειξη: Το τοπικό σφάλμα διακριτοποίησης

$$\delta_n = a_k y(t_{n+k}) + \dots + a_1 y(t_{n+1}) + a_0 y(t_n) - h\{\beta_k y'(t_{n+k}) + \dots + \beta_0 y'(t_n)\} = O(h^{p+1})$$

$$C_0 = C_1 = \dots = C_p = 0 \ , \ C_{p+1} \neq 0$$

$$\max_{0 \le n \le N-k} |\delta_n| \le C h^{p+1} \max_{a \le t \le b} |y^{(p+1)}(t)|$$

$$\varepsilon_n = y(t_n) - y_n$$

$$a_k \varepsilon_{n+k} + \dots + a_0 \varepsilon_n = \left(a_k y(t_{n+k}) + \dots + a_0 y(t_n)\right) - \left(a_k y_{n+k} + \dots + a_0 y_n\right)$$

$$= h\left(\beta_k f(t_{n+k}, y(t_{n+k})) + \dots + \beta_0 f(t_n, y(t_n))\right) - h\left(\beta_k f_{n+k} + \dots + \beta_0 f_n\right) + \delta_n$$

$$= h\left[\beta_k\left(f(t_{n+k}, y(t_{n+k})) - f_{n+k}\right) + \dots + \beta_0\left(f(t_n, y(t_n)) - f_n\right)\right] + \delta_n$$

Έστω $$g_m = \begin{cases} \dfrac{f(t_m, y(t_m)) - f_m}{\varepsilon_m}, & \varepsilon_m \neq 0 \\ 0, & \varepsilon_m = 0 \end{cases}$$

Άρα

$$a_k \varepsilon_{n+k} + \dots + a_0 \varepsilon_n = h\left(\beta_k g_{n+k} \varepsilon_{n+k} + \dots + \beta_0 g_n \varepsilon_n\right) + \delta_n$$

Αφού f ικανοποιεί την "ολική" συνθήκη Lipschitz (με σταθερά L)

$$|g_m| \leq L, \quad 0 \leq n \leq N.$$

Επομένως $\beta_i^n = \beta_i g_{n+i}$ έχουμε $\max |\beta_i^n| \leq L \max\limits_{0 \leq i \leq k} |\beta_i| \leq B < \infty$

Συνεπώς σύμφωνα με την Πρόταση (ευστάθεια, Butcher)

$$\max_{0\le n\le N}|\varepsilon_n| \le C\left[N \max_{0\le n\le N-k}|\delta_n| + \max_{0\le j\le k-1}|\varepsilon_j|\right]$$

$$\le C_1\left[N\cdot h\, h^p \max_{a\le t\le b}|y^{(p+1)}(t)| + \max_{0\le j\le k-1}|\varepsilon_j|\right], \qquad Nh=(b-a)$$

Αν k-βηματική μέθοδο συγκλίνουσα $\iff$ ευστάθεια + συνέπεια.

Θεώρημα (Dahlquist): Η μέγιστη τάξη ακρίβειας μιας ευσταθούς k-βηματικής μεθόδου είναι
$$\begin{cases} p = k+1 & \text{αν το } k \text{ είναι περιττός} \\ p = k+2 & \text{αν το } k \text{ είναι άρτιος} \end{cases}$$

Π.χ. αν $k=1$ (μονοβηματική μέθοδο) Τραπεζίου έχει $p=2$.

αν $k=2$ (2-βηματική μέθοδο) Simpson έχει $p=4$.

Η τραπεζίου & Simpson είναι πετυχημένες

Παρατήρηση:
Η μέγιστη τάξη ακρίβειας μιας άμεσης k-βηματικής μεθόδου είναι $\underline{\underline{p = k}}$