Άσκηση: Δείξτε ότι μια δι-βηματική μέθοδος της μορφής

$$y_{n+2} - y_{n+1} = h(\beta_2 f_{n+2} + \beta_1 f_{n+1} + \beta_0 f_n)$$

έχει μέγιστη τάξη ακρίβειας όταν $\beta_2 = \frac{5}{12}$, $\beta_1 = \frac{2}{3}$, $\beta_0 = -\frac{1}{12}$

Ποια είναι η σταθερά του τοπικού σφάλματος διακριτοποίησης για αυτή τη μέθοδο ($C_{p+1} = ?$)

$\rho(z) = z^2 - z$, $\sigma(z) = \beta_2 z^2 + \beta_1 z + \beta_0$, $\rho'(z) = 2z - 1$

$\rho(1) = 0 \Rightarrow C_0 = 0$, $\rho'(1) = 2 - 1 = 1$, $\sigma(1) = \beta_2 + \beta_1 + \beta_0$

$C_1 = 0 \Leftrightarrow \boxed{\beta_2 + \beta_1 + \beta_0 = 1}$

$$C_2 = \frac{1}{2!}(2^2 a_2 + a_1) - 1(2\beta_2 + \beta_1) = \frac{1}{2}(4 - 1) - (2\beta_2 + \beta_1) \Rightarrow \boxed{2\beta_2 + \beta_1 = 3/2}$$

$$C_3 = \frac{1}{3!}\left(2^3 a_2 + a_1\right) - \frac{1}{2!}\left(2^2 \beta_2 + \beta_1\right)$$

$$= \frac{1}{6}\left(8 - 1\right) - \frac{1}{2}\left(4\beta_2 + \beta_1\right) = 0 \Rightarrow \boxed{4\beta_2 + \beta_1 = \frac{7}{3}}$$

$$2\beta_2 + \beta_1 = \frac{3}{2} \Rightarrow \beta_1 = \frac{3}{2} - 2\beta_2$$

$$4\beta_2 + \beta_1 = \frac{7}{3} \Rightarrow 4\beta_2 + \left(\frac{3}{2} - 2\beta_2\right) = \frac{7}{3}$$

$$\Rightarrow 2\beta_2 = \frac{7}{3} - \frac{3}{2} = \frac{14}{6} - \frac{9}{6} = \frac{5}{6}$$

$$\Rightarrow \beta_2 = \frac{5}{12}$$

$$\beta_1 = \frac{3}{2} - 2\beta_2 = \frac{3}{2} - \frac{5}{6} = \frac{9}{6} - \frac{5}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$\beta_2+\beta_1+\beta_0 = 1 \Rightarrow \beta_0 = 1-\beta_2-\beta_1 = 1-\frac{5}{12}-\frac{2}{3} = 1-\frac{5}{12}-\frac{8}{12} = \frac{12}{12}-\frac{13}{12} = -\frac{1}{12}$$

$$\underline{C_0 = C_1 = C_2 = C_3 = 0}$$

$$C_4 = 0\ (?)$$

$$C_4 = \frac{1}{4!}\left(2^4 a_2 + a_1\right) - \frac{1}{3!}\left(2^3\beta_2+\beta_1\right)$$

$$= \frac{1}{4!}(16-1) - \frac{1}{3!}\left(8\cdot\frac{5}{12}+\frac{2}{3}\right) = \frac{15}{24} - \frac{1}{6}\left(\frac{2\cdot 5}{3}+\frac{2}{3}\right)$$

$$= \frac{15}{24} - \frac{1}{6}\cdot\frac{12}{3} = \frac{15}{24} - \frac{2}{3} = \frac{15}{24} - \frac{2\cdot 8}{24} = -\frac{1}{24} \neq 0, \quad \boxed{p=3}$$

<u>Άσκηση</u>: Προσδιορίστε τους συντελεστές $a_1, a_0, \beta_2, \beta_1, \beta_0$ της μεθόδου

$$y_{n+2} + a_1 y_{n+1} + a_0 y_n = h\left(\beta_2 f_{n+2} + \beta_1 f_{n+1} + \beta_0 f_n\right)$$

ώστε η τάξη ακρίβειας να είναι $p = 2, 3$, ή 4, αντίστοιχα.
Υπάρχει μέθοδος με $p=5$ (;). Είναι ευσταθείς αυτές οι μέθοδοι;

$C_0 = 1 + a_1 + a_0 = 0$, $\rho(z) = a_2 z^2 + a_1 z + a_0$, $\rho'(z) = 2a_2 z + a_1$.

$C_1 = \rho'(1) - \sigma(1) = 0$ $\qquad \sigma(z) = \beta_2 z^2 + \beta_1 z + \beta_0$.

$= 2 + a_1 - (\beta_2 + \beta_1 + \beta_0) = 0$.

$C_2 = \frac{1}{2!}\left(2^2 a_2 + a_1\right) - \left(2\beta_2 + \beta_1\right) = 0$ (Για να είναι τουλάχιστον $p=2$)

$$\left.\begin{aligned} C_0 &= 0 \\ C_1 &= 0 \\ C_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} a_0 &= -(a_1+1) \\ \beta_0 &= -(\beta_1+\beta_2)+2+a_1 \\ a_1 &= 2(2\beta_2+\beta_1)-4 \end{aligned}$$

$$a_0 = -4\beta_2 - 2\beta_1 + 4 - 1 = -4\beta_2 - 2\beta_1 + 3$$

$$\beta_0 = -(\beta_1+\beta_2)+2+4\beta_2+2\beta_1-4 = 3\beta_2+\beta_1-2$$

Για $p=2$, προσδιορίζουμε τα a_0, a_1, β_0, για $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$.

$$C_3 = \frac{1}{3!}(2^3+a_1) - \frac{1}{2!}(2^2\beta_2+\beta_1) = 0 \quad (\text{για } p=3)$$

$$= \frac{1}{6}(8+a_1) - \frac{1}{4}(4\beta_2+\beta_1) = 0 \Rightarrow a_1 = 3(4\beta_2+\beta_1)-8$$

$$\left.\begin{aligned} c_2 &= 0 \\ c_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad 4\beta_2 + 2\beta_1 - 4 = 12\beta_2 + 3\beta_1 - 8$$

$$\text{ή} \quad -8\beta_2 + 4 = \beta_1$$

Επομένως για $\underline{p=3}$ $(c_0 = c_1 = c_2 = c_3 = 0)$

$$\begin{cases} a_0 = -4\beta_2 - 2(4 - 8\beta_2) + 3 = 12\beta_2 - 5 \\ \beta_0 = -5\beta_2 + 2 \\ a_1 = 4 - 12\beta_2 \\ \underline{\beta_1 = 4 - 8\beta_2} \end{cases} \qquad \beta_2 \in \mathbb{R}.$$

Για $p=4$ πρέπει $C_0 = C_1 = \ldots = C_3 = C_4 = 0$.

$$C_4 = \frac{1}{4!}\left(2^4 + a_1\right) - \frac{1}{3!}\left(2^3 \beta_2 + \beta_1\right)$$

$$= \frac{1}{24}\left(16 + a_1\right) - \frac{1}{3!}\left(8\beta_2 + \beta_1\right) = 0$$

ή $a_1 = 4\left(8\beta_2 + \beta_1\right) - 16$

$$= 4\left(8\beta_2 + 4 - 8\beta_2\right) - 16 = 16 - 16 = 0$$

$$a_1 = 4 - 12\beta_2 = 0 \Rightarrow \boxed{\beta_2 = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}}$$

$$\boxed{\beta_1 = 4 - 8\beta_2 = 4 - 8\frac{1}{3} = \frac{4}{3}}, \quad \boxed{\beta_0 = 2 - 5\beta_2 = \frac{1}{3}}, \quad \boxed{a_0 = -a_1 - 1 = -1}$$

$$y_{n+2} - y_n = h\left(\frac{1}{3} f_{n+2} + \frac{4}{3} f_{n+1} + \frac{1}{3} f_n\right) \qquad (\text{Simpson})$$

$C_0 = C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 0$ τάξη ακρίβειας $\underline{p=4}$

Για να έχουμε $p=5$ πρέπει $C_0 = \dots = C_4 = 0 = C_5$.

$$C_5 = \frac{1}{5!}(2^5 + a_1) - \frac{1}{4!}(2^4 \beta_2 + \beta_1)$$

$$= \frac{1}{5!}(2^5 + 0) - \frac{1}{4!}\left(2^4 \cdot \frac{1}{3} + \frac{4}{3}\right) = \frac{1}{5 \cdot 24} \cdot 32 - \frac{1}{24}\left(\frac{16+4}{3}\right) = 0$$

ή $\quad 32 = 5\left(\frac{20}{3}\right)$ (δεν ισχύει)

Επομένως $\underline{C_5 \neq 0}$ δεν υπάρχει μέθοδος με $p=5$.

$$p(z) = z^2 + a_1 z + a_0 \qquad C_0 = 0 \Rightarrow a_0 = -1-a_1$$
$$= z^2 + a_1 z - (1+a_1),$$

Είναι ευσταθείς οι μέθοδοι αν ισχύει η συνθήκη των ριζών.

Αν z ρίζα $p(z)=0$, $|z| \leq 1$.

$$\Delta = a_1^2 + 4(1+a_1) = (a_1+2)^2$$

$$z_{1,2} = \frac{-a_1 \pm (a_1+2)}{2} = \begin{cases} 1 \\ -a_1-1 \end{cases}$$

Θα πρέπει $|-a_1-1| \leq 1$ ή $|a_1+1| \leq 1$ ή $-1 \leq a_1+1 \leq 1$

ή $-2 \leq a_1 \leq 0$

Αν $a_1 = -2$ τότε $z_1 = z_2 = 1$. Τότε δεν θα ικανοποιείται η συνθήκη των ριζών

Αν $-2 < a_1 \le 0$ τότε οι μέθοδοι είναι ευσταθείς.

$p = 4$, έχουμε $a_1 = 0$ και άρα είναι ευσταθής.

$p = 3$ $\quad a_1 = 4 - 12\beta_2$, τότε $\quad -2 < 4 - 12\beta_2 \le 0$

ή $\quad \frac{1}{3} \le \beta_2 < \frac{1}{2}$

$\underline{p = 2}$. Ανάλογα βρίσκουμε ένα εύρος τιμών για τα β_1 & β_2.