Άσκηση: Έστω η μέθοδος $y_{n+2} + (a-1)y_{n+1} - a y_n = \frac{h}{4}\left[(a+3) f_{n+2} + (3a+1) f_n\right]$

i) Για ποια a ικανοποιείται η συνθήκη των ριζών

ii) Αν $a=-1$, εφαρμόστε τη μέθοδο για $\begin{cases} y'(t) = y(t) \\ y(0)=1 \end{cases}$ $\quad 0 \le t \le T$

και λύστε ακριβώς την εξίσωση διαφορών που προκύπτει για $y_0 = y_1 = 1$

Δείξτε ότι η μέθοδος αποκλίνει.

$$\rho(z) = z^2 + (a-1)z - a, \qquad \Delta = (a-1)^2 + 4a = a^2 + 1 - 2a + 4a = (a+1)^2$$

$$z_{1,2} = \frac{-(a-1) \pm (a+1)}{2} = \begin{cases} 1 \\ -a \end{cases}$$

Για να ικανοποιείται η συνθήκη των ριζών πρέπει κάθε απλή ρίζα $|z| \le 1 \Rightarrow |a| \le 1$.

Αν έχουμε διπλή ρίζα (και ρίζα της ρ') τότε $|z| < 1$. Για $a = -1$ έχουμε $\rho'(z) = 0$

Συνεπώς $a \in (-1, 1]$ για να ικανοποιείται η συνθήκη των ριζών

Για $\alpha = -1$, η μέθοδος γίνεται

$$y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n = \frac{h}{2}(f_{n+2} - f_n) \qquad (\text{Λύνουμε } y' = y)$$

$y_0 = y_1 = 1$, $\quad y_2 = 2y_1 - y_0 + \frac{h}{2}(y_2 - y_0)$

ή $\left(1 - \frac{h}{2}\right)y_2 = 2y_1 - \left(1 + \frac{h}{2}\right)y_0$

$$= 2 - \left(1 + h/2\right) = \left(1 - h/2\right)$$

Άρα $y_2 = 1$.

Εύκολα βλέπουμε επαγωγικά δείχνουμε ότι $y_n = 1$ για κάθε n

Όμως η ακριβής $y(t) = e^t$. Συνεπώς $y_n \not\to y(t)$, $t = n \cdot h$, $\begin{matrix} n \to \infty \\ h \to 0 \end{matrix}$

Άρα η μέθοδος αποτυγχάνει.

Άσκηση: Εφαρμόστε τη μέθοδο $y_{n+2}-y_{n+1}=\frac{h}{12}\left(4f_{n+2}+8f_{n+1}-f_n\right)$

στο πρόβλημα $\begin{cases} y'(t)=t & 0\le t\le 1 \\ y(0)=0 \end{cases}$

Η ακριβής λύση είναι $y(t)=\frac{1}{2}t^2$. Ποια θα είναι η ακολουθία y_n που δίνει η μέθοδος αν $y_0=0$, $y_1=\frac{h^2}{2}$. Αν $h=\frac{1}{N}$, που συγκλίνει η y_N, $N\to\infty$. Είναι αυτή η επιθυμητή σύγκλιση;

Υπόδειξη: Βρείτε σταθερές A,B,Γ τ.ω. $y_n=An^2+Bn+\Gamma$

$$h=\frac{1}{N}, \quad t_n = nh, \quad n=0,1,2,\dots,N \qquad f(t,y)=t$$

$$y_{n+2}-y_{n+1}=\frac{h}{12}\left(4(n+2)h+8(n+1)h-nh\right)=\dots=\frac{h^2}{12}(11n+16)$$

$$y_0=0, \quad y_1=\frac{h^2}{2}=\frac{6h^2}{12}, \quad y_2=y_1+\frac{h^2}{12}(11\cdot 0+16)$$

$$y_3=y_2+\frac{h^2}{12}(11\cdot 1+16)=y_1+\frac{h^2}{12}\left(11(0+1)+2\cdot 16\right)$$

$$y_4=y_3+\frac{h^2}{12}(11\cdot 2+16)=y_1+\frac{h^2}{12}\left(11(0+1+2)+3\cdot 16\right)$$

Επαγωγική υπόθεση $$y_{n+1}=y_1+\frac{h^2}{12}\left(11(0+1+2+\dots+(n-1))+n\cdot 16\right)$$

$$y_{n+2}=y_{n+1}+\frac{h^2}{12}(11n+16)=y_1+\frac{h^2}{12}\left(11(1+2+\dots+n)+(n+1)16\right)$$

Επομένως ισχύει $$y_n=y_1+\frac{h^2}{12}\left(11(1+2+\dots+(n-2))+(n-1)16\right)$$

$$1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$y_n = y_n + \frac{h^2}{12}\left(11\,\frac{(n-2)(n-1)}{2} + 16(n-1)\right) = y_n + \frac{h^2}{12}\left(\frac{11}{2}(n^2-3n+2) + 16n - 16\right)$$

$$= \frac{h^2}{12}\left(\frac{11}{2}n^2 + \frac{16\cdot 2 - 33}{2}\,n + \frac{22}{2} - 16 + 6\right) = \frac{h^2}{24}\left(11n^2 - n + 2\right)$$

$$y_n = An^2 + Bn + \Gamma, \quad A = \frac{11}{24}h^2, \quad B = -\frac{h^2}{24}, \quad \Gamma = \frac{2h^2}{24}$$

$$y_N = \frac{11}{24}h^2N^2 - \frac{h}{24}hN + \frac{2h^2}{24}, \qquad h = \frac{1}{N} \Rightarrow hN = 1.$$

$$= \frac{11}{24} - \frac{h}{24} + \frac{2}{24}h^2 \xrightarrow[N\to\infty]{h\to 0} \frac{11}{24} \neq 1/2 = y(t_N) = y(1)$$