# Μέθοδοι Πρόβλεψης - Διόρθωσης

Πεπλεγμένη πολυβηματική μέθοδο (π.χ. 1-βηματική τραπεζίου)

$$y_{n+1} - y_n = \frac{h}{2}\left(f_{n+1} + f_n\right)$$

$$y_0, \quad y_1 = y_0 + \frac{h}{2}\left(f(t_1, y_1) + f(t_0, y_0)\right)$$

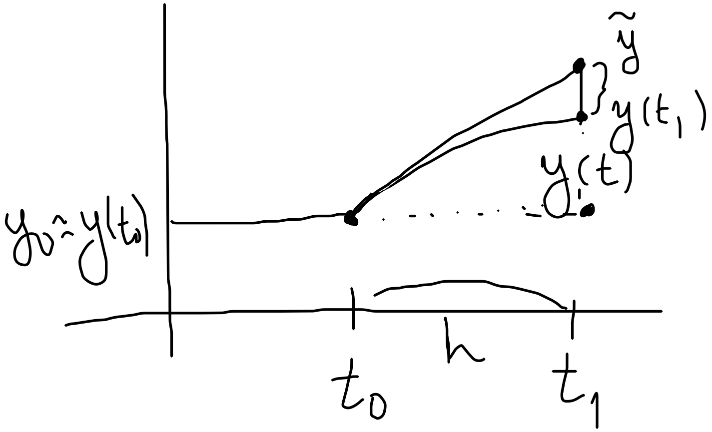
Μέθοδο σταθερού σημείου.

$$g(x) = y_0 + \frac{h}{2} f(t_0, y_0) + \frac{h}{2} f(t_1, x)$$

$$g(x^*) = x^*$$

Χρησιμοποιώντας $x_0, \; x_1 = g(x_0), \ldots, x_k = g(x_{k-1})$

Μπορούμε να επιλέξουμε $x_0 \simeq x^*$ να είναι $x_0 = y_0$




$$\tilde{y} = y_0 + h f(t_0, y_0)$$

$$x_0 = y_0 + h f(t_0, y_0)$$ Πρόβλεψη

$$x_1 = y_0 + \frac{h}{2} f(t_0, y_0) + \frac{h}{2} f(t_0, x_0)$$ Διόρθωση

$$x_2 = y_0 + \frac{h}{2} f(t_0, y_0) + \frac{h}{2} f(t_0, x_1)$$ Διόρθωση

## Π-Δ : Euler - Τραπεζιου

Διορθωση γινεται σε 1-2 βηματα.

Π : Αμεση Euler $\qquad \tilde{y}_n = y_n + h f(t_n, y_n)$

Δ : Τραπεζιου $\qquad y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left(f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, \tilde{y}_n)\right)$

(Π-Δ) : Αμεση Euler - BDF(2)

Αμεση Euler - AM(2)

Προβλεψη (Αμεση μεθοδο) : Γνωστες $y_0, \dots, y_{k-1}$

$$\tilde{a}_k \tilde{y}_{n+k} + \sum_{j=0}^{k-1} \tilde{a}_j y_{n+j} = h \sum_{j=0}^{k-1} \tilde{\beta}_j f_{n+j}$$

Διορθωση (Πεπλεγμενη μεθοδο) $\qquad n = 0, \dots, N-k.$

$$a_k y_{n+k} + \sum_{j=0}^{k-1} a_j y_{n+j} = h \beta_k f(t_{n+k}, \tilde{y}_{n+k}) + h \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j f_{n+j}$$

$\tilde{a}_k = a_k = 1$

Έστω (Π) έχει τάξη ακρίβειας $p^*$ και η (Δ) έχει τάξη ακρίβειας $p$

$$\tilde{\delta}_n = \tilde{a}_k y(t_{n+k}) + \sum_{j=0}^{k-1} \tilde{a}_j y(t_{n+j}) - h \sum_{j=0}^{k-1} \tilde{\beta}_j y'(t_{n+j}) \quad , \quad |\tilde{\delta}_n| \leq C h^{p^*+1}$$

$$\delta_n = a_k y(t_{n+k}) + \sum_{j=0}^{k-1} a_j y(t_{n+j}) - h \sum_{j=0}^{k} \beta_j y'(t_{n+j}) \quad , \quad |\delta_n| \leq C h^{p+1}$$

(Π) - (Δ)

$$\tilde{a}_k \tilde{y} + \sum_{j=0}^{k-1} \tilde{a}_j y(t_{n+j}) = h \sum_{j=0}^{k-1} \tilde{\beta}_j f(t_{n+j}, y(t_{n+j}))$$

$$\delta_n^* = a_k y(t_{n+k}) + \sum_{j=0}^{k-1} a_j y(t_{n+j}) - h\beta_k f(t_{n+k}, \tilde{y}) - h \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j y'(t_{n+j})$$

$$= \underbrace{a_k y(t_{n+k}) + \sum_{j=0}^{k-1} a_j y(t_{n+j}) - h \sum_{j=0}^{k} \beta_j y'(t_{n+j})}_{\delta_n} + \underline{h\beta_k f(t_{n+k}, y(t_{n+k})) - h\beta_k f(t_{n+k}, \tilde{y})}$$

$$|h\beta_k (f(t_{n+k}, y(t_{n+k})) - f(t_{n+k}, \tilde{y}))| \leq h|\beta_k| \cdot L\, |y(t_{n+k}) - \hat{y}|$$

$$\leq h|\beta_k| L \cdot |\tilde{\delta}_n| \leq C h^{p^*+2}$$

$$|\delta_n^*| \leq C h^{p+1} + h^{p^*+2}$$

Για να έχει η μέθοδος (Π)-(Δ) τάξη ακρίβειας $p$ αρκεί $p^* \geq p-1$.

Ευστάθεια (Π)-(Δ): εξαρτάται μόνο από την ευστάθεια της μεθόδου διόρθωσης (Δ).