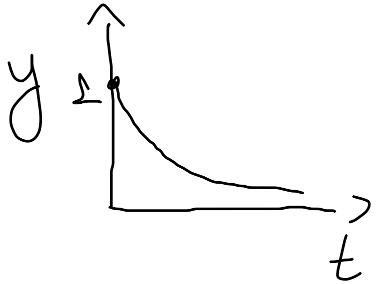
Απόλυτη ευστάθεια πολυβηματικών μεθόδων

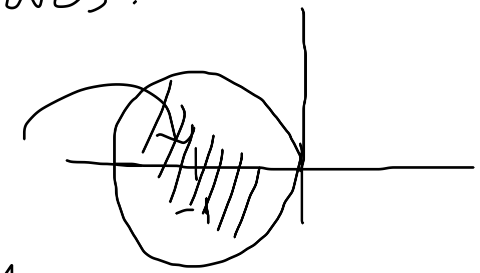
$$\begin{cases} y'(t) = \lambda y(t) & 0 \le t \le T \\ y(0) = 1 \end{cases} , \quad \lambda \in \mathbb{C} , \quad Re(\lambda) < 0$$

$$y(t) = e^{\lambda t}$$



Οι προσεγγίσεις $y_n \approx y(t_n)$ να είναι φραγμένες.

· Άμεση Euler. h βήμα. $h\lambda$



$$|1 + h\lambda| \le 1$$

· Πεπλεγμένη Euler : h : δεν υπάρχει περιορισμός.

Κ-βηματική μέθοδο.

$$a_k y_{n+k} + \dots + a_0 y_n = h(\beta_k f_{n+k} + \dots + \beta_0 f_n)$$

Εφαρμόζουμε στο Π.Α.Τ. $y' = \lambda y$.

$$a_k y_{n+k} + \dots + a_0 y_n = h\lambda(\beta_k y_{n+k} + \dots + \beta_0 y_n)$$

ή $$(a_k - h\lambda\beta_k) y_{n+k} + \dots + (a_0 - h\lambda\beta_0) y_n = 0$$

Εξίσωση διαφορών. $\Rightarrow$ y_n να παραμένει φραγμένη.

Χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\pi(z) = (a_k - h\lambda\beta_k) z^k + \dots + (a_1 - h\lambda\beta_1) z + (a_0 - h\lambda\beta_0)$

Θέλουμε να έχει ρίζες που να ικανοποιούν τη συνθήκη των ριζών

$\rho(z) = a_k z^k + \dots + a_1 z + a_0$, $\sigma(z) = \beta_k z^k + \dots + \beta_1 z + \beta_0$.

$\pi(z; h\lambda) = \rho(z) - h\lambda\sigma(z)$, θέλουμε να ικανοποιεί των ριζών.

$\pi(z) = 0$ τότε $|z| \leq 1$ & $\pi'(z) = \pi(z) = 0$, $|z| < 1$.

· Άμεση Euler. $y_{n+1} = y_n + h f_n$ ή $y_{n+1} - y_n = h f_n$.

$\rho(z) = z - 1$, $\sigma(z) = 1$. $\pi(z; h\lambda) = z - 1 - h\lambda$,

$z = 1 + h\lambda$ ρίζα. , $|1 + h\lambda| \leq 1$.

Πεπλεγμένη Euler $y_{n+1} = y_n + h f_{n+1}$, $\rho(z) = z - 1$, $\sigma(z) = z$.

$\pi(z; h\lambda) = z - 1 - h\lambda z = (1 - h\lambda)z - 1$, $\pi(z) = 0$, $z = \dfrac{1}{1 - h\lambda}$, $|z| \leq 1$

$z \in \mathbb{C}$, $Re(z) < 0$

Διβηματική μέθοδο του μέσου

$$y_{n+2} = y_n + 2h f_{n+1}$$

$\rho(z) = z^2 - 1$, $\sigma(z) = 2z$.

$\pi(z;h\lambda) = z^2 - 2h\lambda z - 1$

Αν $\pi(z_1) = \pi(z_2) = 0$, $|z_1 z_2| = |-1| = 1$.

$|z_1| = 1$ τότε αναγκαστικά $|z_2| = 1$. Αν $|z_1| < 1 \Rightarrow |z_2| > 1$.

Έστω ζ ρίζα του $\pi(\zeta) = 0$, $\zeta^2 - 2h\lambda\zeta - 1 = 0$ ή $\zeta(\zeta - 2h\lambda) = 1$

$\Rightarrow |\zeta||\zeta - 2h\lambda| = 1$ Αν $|\zeta| \neq 1$ τότε δεν θα ισχύει η συνθήκη των ριζών

Αν $|\zeta| = 1$ τότε $|\zeta - 2h\lambda| = 1$

Αν $J=1$ τοτε $J-2h_j=1 \Rightarrow h_j=0$

Αν $J=-1$ τοτε $J-2h_j=-1 \Rightarrow h_j=0$

· Αρα το π ικανοποιει τη συνθηκη των ριζων μονο για τη μη ενδιαφερουσα περιπτωση $h_j=0$.

Μέθοδο Simpson: $y_{n+2}-y_n=\frac{h}{3}\left(f_{n+2}+4f_{n+1}+f_n\right)$

$\rho(z)=z^2-1$, $\sigma(z)=\frac{1}{3}z^2+\frac{4}{3}z+\frac{1}{3}$

$\pi(z;h\lambda)=\rho(z)-h\lambda\sigma(z)=z^2-1-\frac{h\lambda}{3}\left(z^2+4z+1\right)=\left(1-\frac{h\lambda}{3}\right)z^2-4\frac{h\lambda}{3}z-\left(1+\frac{h\lambda}{3}\right)$

$=\left(1-\frac{h\lambda}{3}\right)\left[z^2-4\frac{h\lambda}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{h\lambda}{3}}z-\frac{1+h\lambda/3}{1-h\lambda/3}\right]$

$\beta=\frac{2h\lambda}{3}\frac{1}{1-\frac{h\lambda}{3}}$, ώστε $\pi(z)=\left(1-\frac{h\lambda}{3}\right)\left[z^2-2\beta z-(1+\beta)\right]$

Έστω $p(z)=z^2-2\beta z-(1+\beta)$, $\Delta=4\beta^2+4(1+\beta)=4(\beta^2+\beta+1)>0$.

$J_{1,2}=\beta\pm\sqrt{\beta^2+\beta+1}$

Έστω $h_j \neq 0$ και θέλουμε $|\lambda_{1,2}| \leq 1$

Θα πρέπει λοιπόν $-1 \leq \beta - \sqrt{\beta^2+\beta+1} \leq 1$

$-1 \leq \beta - \sqrt{\beta^2+\beta+1} \iff \sqrt{\beta^2+\beta+1} \leq \beta+1 \Rightarrow \beta^2+\beta+1 \leq (\beta+1)^2$

$\iff \beta^2+\beta+1 \leq \beta^2+2\beta+1$

$\iff \beta \leq 2\beta$, άτοπο διότι $\beta < 0$.

Άρα μόνο για $h_j = 0$ το $\pi(z)$ ικανοποιεί τη συνθήκη των ριζών.

Παρατήρηση: BDF 2. $\frac{3}{2} y_{n+2} - 2y_{n+1} + \frac{1}{2} y_n = h f_{n+2}$.

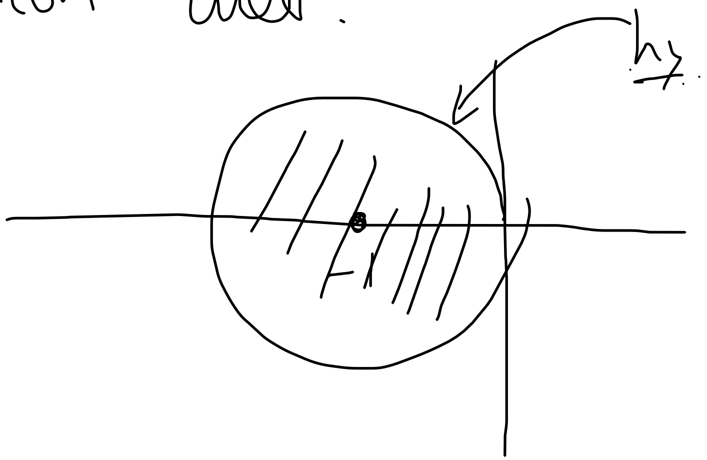
το $\pi(z; h\lambda) = (3/2 - h\lambda) z^2 - 2z + \frac{1}{2}$, Για κάθε $\underline{h\lambda}$, $Re(\lambda) < 0$

το $\pi(z)$ ικανοποιεί τη συνθήκη των ριζών.

A-ευσταθείς μέθοδοι όταν δεν υπάρχει περιορισμός του $\underline{h}$ ώστε να προκύπτει μια μέθοδος απολύτως ευσταθής

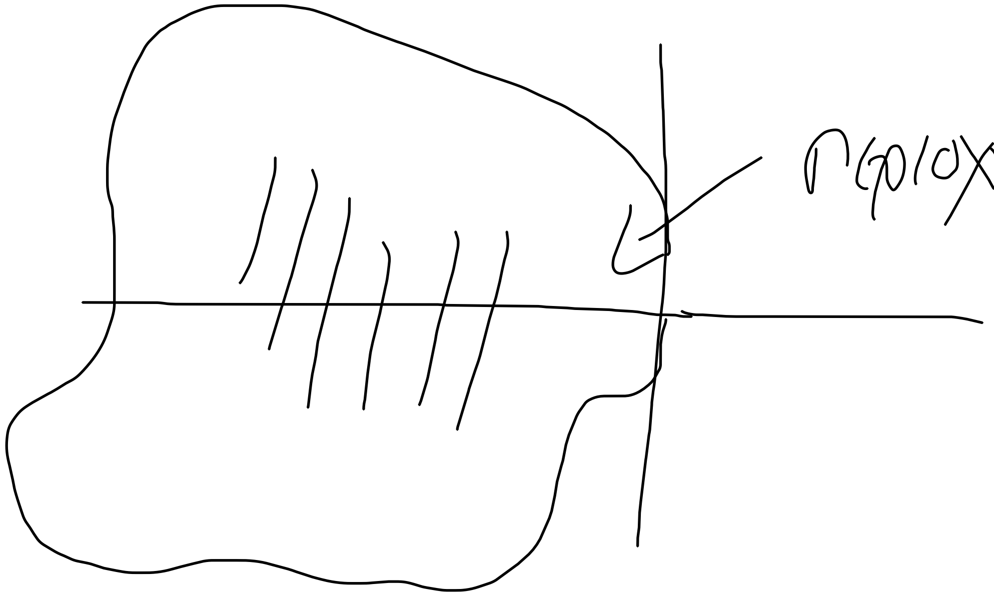
Πεπλεγμένη Euler, BDF 2.

- Άμεση Euler.

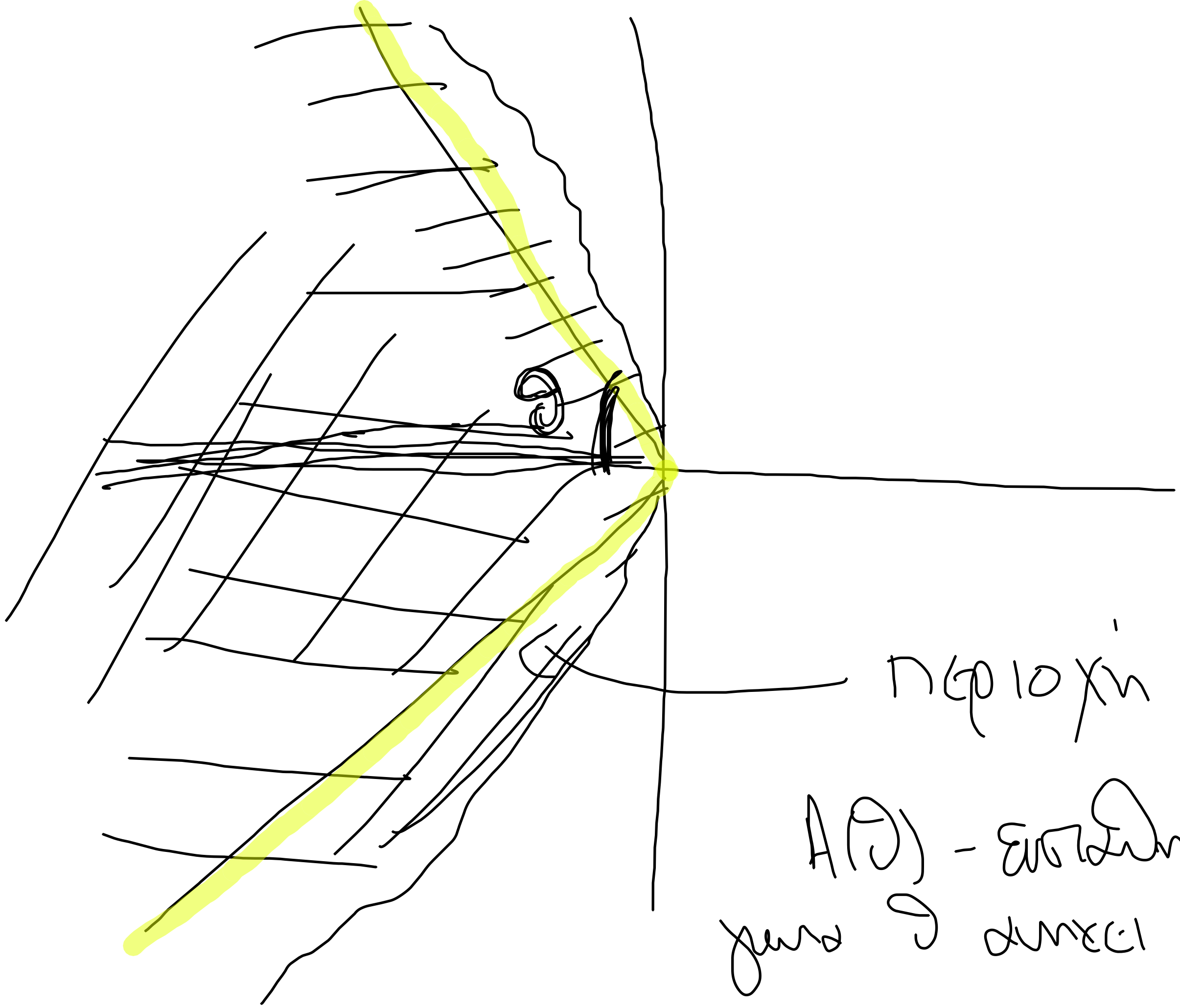


$|1 + h\lambda| \leq 1.$

Περιοχή απόλυτης ευστάθειας

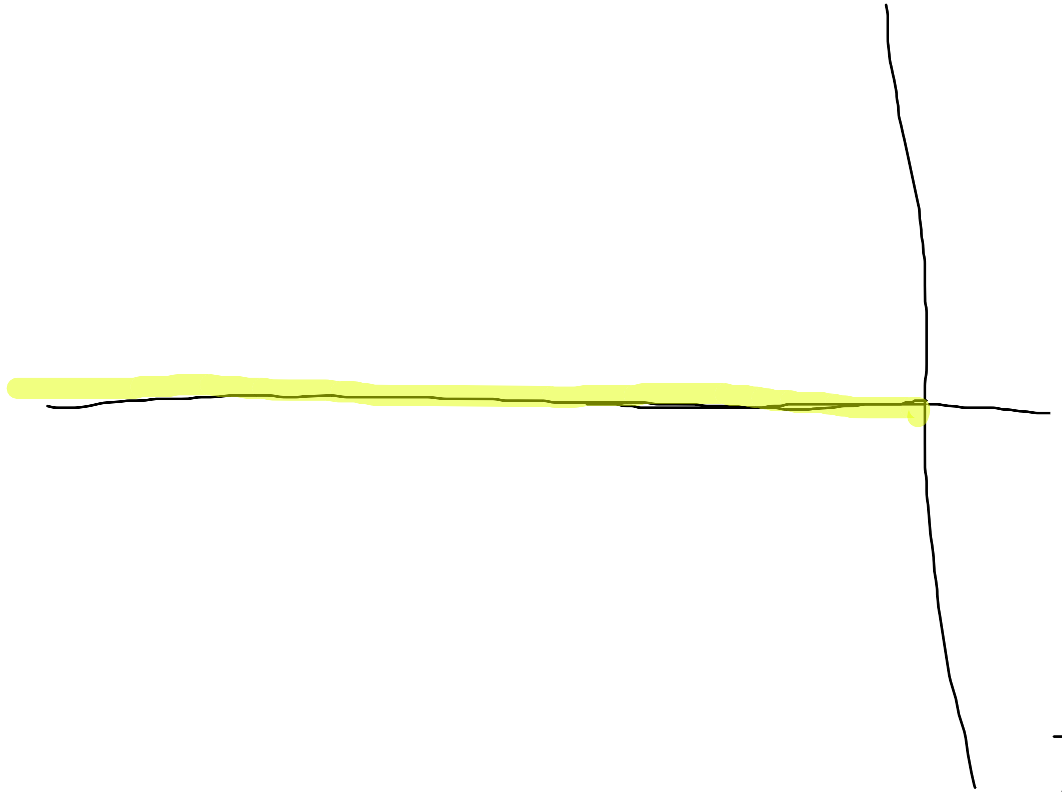


Περιοχή απόλυτης ευστάθειας μιας μεθόδου.



περιοχή απόλυτης ευστάθειας της μεθόδου

A(θ) - ευστάθεια αν ο τομέας με γωνία θ ανήκει στην περιοχή απόλυτης ευστάθειας



$\lambda \in \mathbb{R}$ και $\lambda < 0$.

Αν $h\lambda \in$ περιοχή ευστάθειας της μεθόδου χωρίς περιορισμό του h

Εάν $\lambda \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Im}(\lambda) \neq 0$
τότε $h\lambda \notin$ περιοχή απόλυτης ευστάθειας

Τότε A_0-ευσταθής μέθοδος.

Πρόταση (Dahlquist) : Δεν υπάρχουν άμεσες A-ευσταθείς πολυβηματικές μέθοδοι

Επίσης η τάξη ακρίβειας μιας A-ευσταθούς πολυβηματικής μεθόδου είναι το πολύ $\underline{\underline{2}}$.