Πρόταση: Έστω $p(z) = z^2 + az + b$ αν

(i) $b \leq 1$ (ii) $\begin{cases} 1+b > |a| \\ \& \ 1+b = |a| \text{ τότε } b < 1 \end{cases}$

Τότε το p ικανοποιεί τη συνθήκη των ριζών.

Απόδειξη: Αν z είναι ρίζα του p, $|z| \leq 1$ & z είναι και $p'(z) = 0$ τότε $|z| < 1$.

$\Delta = a^2 - 4b$

i) Αν $a^2 - 4b < 0 \Rightarrow$ Δύο μιγαδικές ρίζες z_1, z_2, $z_1 = \bar{z}_2$

$|z_1| \cdot |z_2| = |z_1|^2 = |b| \leq 1 \Rightarrow |z_1| = |z_2| \leq 1 \Rightarrow$ ικανοποιείται η συνθήκη.

ii) $\Delta = 0$, $a^2 = 4b$, η ρίζα $z = -a/2$ και $b = \dfrac{a^2}{4} > 0$

Συνεπώς $1+b = 1 + \dfrac{a^2}{4} = 1 - \dfrac{2|a|}{2} + \dfrac{a^2}{4} + |a| = \left(1 - \dfrac{|a|}{2}\right)^2 + |a| > |a|$

$\Rightarrow \dfrac{|a|}{2} \neq 1$ και επομένως $a^2/4 \leq 1 \Rightarrow |z| \leq 1$

Επειδή $1+b > |a|$ τότε $\frac{|a|}{2} < 1$ και $|z| = \frac{|a|}{2} < 1$

Στην περίπτωση $\underline{1+b = |a|} \Rightarrow \left(1 - \frac{|a|}{2}\right) = 0 \Rightarrow \frac{|a|}{2} = 1$ και $b = \frac{a^2}{4} = 1$.

και οδηγούμαστε σε άτοπο επειδή έχουμε υπόθεση ότι $b < 1$.

iii) $\Delta > 0$. $a^2 - 4b > 0$. Έχουμε δύο ρίζες και η μεγαλύτερη κατ' απόλυτο τιμή ρίζα $|z| = \frac{1}{2}\left(|a| + \sqrt{a^2 - 4b}\right)$

$|a| < 1+b \Rightarrow a^2 < (1+b)^2 = 1 + b^2 + 2b$ ή $a^2 - 4b < 1 + b^2 - 2b = (1-b)^2$, $(b \leq 1)$

ή $\sqrt{a^2 - 4b} \leq 1 - b$

Επομένως $|z| \leq \frac{1}{2}(1 + b + 1 - b) \leq 1 \Rightarrow$ ισχύει η συνθήκη των ριζών.

Άσκηση: Αν $p(z)=z^2+az+b$ και ισχύει η ιδιότητα των ριζών τότε

(i) $b\le 1$ και (ii) $\begin{cases} 1+b>|a| \\ \text{και } 1+b=|a| \text{ τότε } b<1 \end{cases}$

Λύση: Αν $a^2-4b<0 \Rightarrow$ οι ρίζες είναι μιγαδικές και $|z|\le 1$

και $|z_1|\cdot|z_2| = b \le 1$.

$$a^2-4b<0 \Rightarrow (1+b)^2=1+b^2+2b=(1-b)^2+4b\ge 4b>a^2 \Rightarrow 1+b>|a|$$

Αν $a^2-4b=0$ τότε έχουμε διπλή ρίζα $z=-\frac{a}{2}$ και ισχύει η ιδιότητα των ριζών

άρα $|z|<1$, $|z|^2=\frac{a^2}{4}=b<1$,

$$(1+b)^2=(1-b)^2+4b=(1-b)^2+a^2>a^2 \Rightarrow 1+b>|a|$$

Αν $a^2 > 4b$ $\Rightarrow$ δυο ρίζες και $|z| = \frac{1}{2}\left(|a| + \sqrt{a^2-4b}\right) \le 1$

Αν $|z_1|\cdot|z_2| = |b| \le 1$. άρα ικανοποιείται η πρώτη υπόθεση.

$$|z| = \frac{1}{2}\left(|a| + \sqrt{a^2-4b}\right) \le 1$$

ή $|a| + \sqrt{a^2-4b} \le 2$

ή $\sqrt{a^2-4b} \le 2 - |a|$

ή $\cancel{a^2} - 4b \le 4 + \cancel{|a|^2} - 4|a|$

ή $|a| \le 1 + b$

Αν $|a| < 1+b$ ή $|a| = 1+b$

$|z| < 1 \Rightarrow |a| < 1+b$

και $|z| = 1 \Rightarrow |a| = 1+b$

Αν $|a| = 1+b$ τότε $b < 1$. Αν $b = 1$ τότε $|a| = 1+1 = 2 \Rightarrow a^2 > 4b$

ή $4 > 4$ άτοπο.