Προβλημα αρχικών τιμών

1 Προβλημα αρχικών τιμών

Προβλημα αρχικων τιμων (Π.Α.Τ.)

$f(t,s) : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & a \leq t \leq b \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

f: γραμμική ως προς τη δεύτερη μεταβλητή

$f(t,s) = s$ ή $f(t,s) = t \cdot s$

ή $f(t,s) = \sin(t) \cdot s$

ή $f(t,s) = t^2 \cdot s$

$$f(t,s) = s^2 t$$

μη-γραμμική ως προς s

Π.Α.Τ.

$$\begin{cases} y'(t) = y^2(t) & 0 \leq t \leq 2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$f(t,y) = y^2$ μη-γραμμική ως προς y

Αν f γραμμική ως προς τη δεύτερη μεταβλητή γνωρίζουμε Δ.Ε. ότι το Π.Α.Τ. έχει μοναδική λύση $\underline{y(t)}$

$y'(t) = y^2(t) \qquad 0 \le t \le 2$

$y'(t)$ θετική $\Rightarrow$ y αύξουσα συνάρτηση

<u>Υπόθεση</u> $y(0) = 1$ $\Rightarrow$ y δεν έχει μηδενικές τιμές

$$\frac{y'(t)}{y^2(t)} = 1 \quad \text{ή} \quad -\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{y(t)}\right) = +\frac{y'(t)}{y^2(t)} = 1$$

$$-\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{y(t)}\right) = 1$$

Ολοκληρώνω σε ένα διάστημα $s \in [0,t]$

$$-\int_0^t \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{y(s)}\right) ds = \int_0^t 1\, ds$$

$$-\frac{1}{y(t)} + \frac{1}{y(0)} = t \quad \text{ή} \quad y(t) = \frac{1}{1-t}$$

Στο $[0,1)$ η $y(t) = \dfrac{1}{1-t}$

συνεχής & καλώς ορισμένη

Για $t=1$ απειρίζεται.

Υπάρχει λύση $y(t)$ στο $[0,1)$ του Π.Α.Τ.

$$\begin{cases} y'(t) = y^2(t) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Όμως στο $[0,2]$

δεν υπάρχει λύση

$$\begin{cases} y'(t) = \sqrt{|y(t)|} & 0 \leq t \leq 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

$f(t,y) = \sqrt{|y|}$ μη-γραμμική ως προς y.

Η $y(t) = 0$ στο $[0,1]$ αποτελεί λύση του ΠΑΤ

Επίσης η

$$y(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t \leq 1/2 \\ \dfrac{(t-1/2)^2}{4} & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$ λύση του ΠΑΤ

ΠΑΤ

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & a \le t \le b \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

f μη-γραμμική ως προς τη $2^η$ μεταβλητή

μπορεί να έχω λύση σε μικρότερο διάστημα

$[a, b'] \subset [a, b]$

ή να έχω πολλές λύσεις

Στο μάθημα ΠΑΤ που έχουν μόνο μια λύση

Lipschitz

$$\left\{\begin{array}{l} \exists\, L \geq 0 \quad \forall\, t \in [a,b] \quad \forall\, y_1, y_2 \in \mathbb{R} \\ |f(t,y_1) - f(t,y_2)| \leq L\,|y_1 - y_2| \end{array}\right.$$

(*) Συνθήκη Lipschitz "ολική"

Θεώρημα (Ύπαρξη & Μοναδικότητα της λύσης του ΠΑΤ)

Έστω $f : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση και ικανοποιεί την "ολική" συνθήκη Lipschitz ως προς y ομοιόμορφα για όλα $t \in [a,b]$.

Τότε το Π.Α.Τ.
$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & a \le t \le b \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

έχει μοναδική λύση.

Παρατήρηση: Η "ολική" συνθήκη Lipschitz είναι αρκετά περιοριστική.

Αν $f(t,y) = y^2$, δεν ικανοποιεί την "ολική" συνθήκη Lipschitz

Π.χ. οι $f(t,y) = y + e^t$ ικανοποιεί τη συνθήκη

$f(t,y) = e^t y + \sin(t)$ —"—

$f(t,y) = e^t \sin(y)$ —"—

$f : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Αν η f είναι παραγωγίσιμη ως προς y (δεύτερη μεταβλητή)

και ισχύει

$\exists M \in \mathbb{R}, \forall t \in [a,b] \ \forall y \in \mathbb{R} \ |f_y(t,y)| \leq M$ (**)

τότε η f ικανοποιεί την

"ολική" συνθήκη του Lipschitz

Π.χ. Η $f(t,y) = \sqrt{|y|}$ δεν ικανοποιεί τη (**)

Μπορούμε να αντικαταστήσουμε την "ολική" συνθήκη Lipschitz από μια "τοπική" συνθήκη Lipschitz

"Τοπική" συνθήκη Lipschitz

$$\exists L > 0 \ \forall t \in [a,b] \ \forall y_1, y_2 \in [y_0 - c, y_0 + c]$$

$$|f(t,y_1) - f(t,y_2)| \leq L |y_1 - y_2|$$

Θεώρημα (Ύπαρξη & μοναδικότητα της λύσης του ΠΑΤ, τοπικά)

Έστω $c>0$ και $f \in C([a,b]\times[y_0-c, y_0+c])$ και η f ικανοποιεί στο $[a,b]\times[y_0-c,y_0+c]$ την "τοπική" συνθήκη του Lipschitz τότε το ΠΑΤ

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

λύνεται μονοσήμαντα στο $[a, b']$, $b' \leq b$

Παρατηρηση: $f \in C([a,b]\times\mathbb{R})$ όχι Lipschitz

ούτε "τοπική" ούτε "ολική" τότε υπάρξη της λύσης του προβλήματος

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

σε ένα διάστημα $[a,c]$, $c>a$

(Χωρίς μοναδικότητα).

$$f:[a,b]\times\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$$

Π.Α.Τ. $\quad y:[a,b]\to\mathbb{R}^m$

$$\begin{cases} y'(t)=f(t,y(t)) & a\le t\le b \\ y(0)=y_0\in\mathbb{R}^m \end{cases}$$

$$(\mathbb{R}^m,\ \|\cdot\|) \qquad \|u\|^2=\sum_{i=1}^{m}|u_i|^2,\quad u=\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\\ \vdots\\ u_m\end{pmatrix}$$

Θεώρημα: $f : [a,b] \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ συνεχής ικανοποιεί "ολική" συνθήκη Lipschitz

$\exists L > 0 \ \forall t \in [a,b] \ \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}^m$

$$\|f(t,y_1) - f(t,y_2)\| \leq L \|y_1 - y_2\|$$

Τότε το ΠΑΤ λύνεται μονοσήμαντα.

Ικανη συνθηκη για να ισχυει η "ολικη"

συνθηκη Lipschitz (διανυσματικες συναρτησεις)

$$\left\| \frac{\partial f(t,y)}{\partial y_i} \right\| \leq L \quad \text{για } t \in [a,b],\ y \in \mathbb{R}^m$$

$$i = 1, \dots, m$$