

# Runge - Kutta.

Многошаговое решение



Еuler, Эванс  $t_n, y_n \approx y(t_n) \Rightarrow t_{n+1}, y_{n+1} \approx y(t_{n+1})$

$$y_{n+1} \approx y(t_{n+1}) \approx y(t_n) + h y'(t_n)$$

$$\approx y(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(s)) ds$$

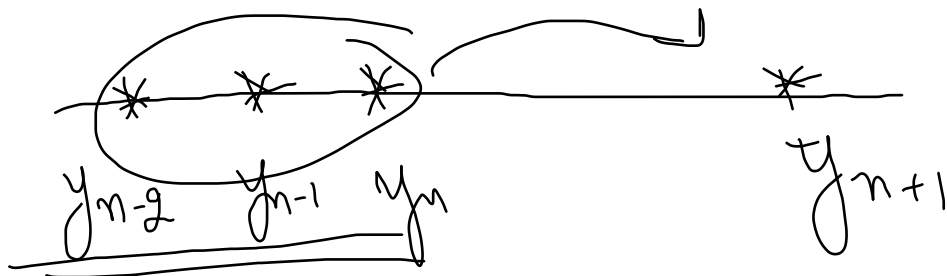
Еuler    Им. Euler    Эванс.

Полшаговое решение

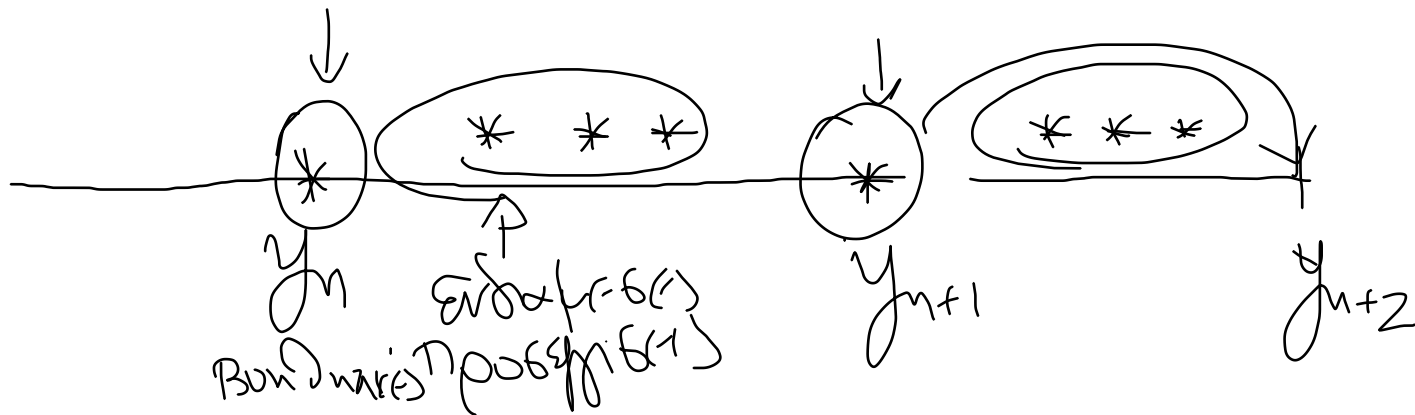
$$t_{n-2}, t_{n-1}, t_n \Rightarrow t_{n+1}$$
$$y_{n-2}, y_{n-1}, y_n \Rightarrow y_{n+1}$$

Range-kutta : μονοβήσιμες μέθοδοι

$$t_n, y_n \longrightarrow t_{n+1}, y_{n+1}$$



Πυρρότητες



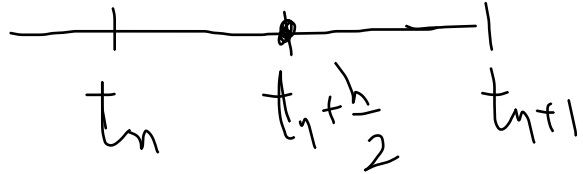
$$y'(t_n) = f(t_n, y(t_n))$$

✓  $y_n \approx y(t_n)$  Γνωρίζουμε ότι

$$f(t_n, y_n) \approx y'(t_n) = f(t_n, y(t_n))$$

Κοιτάζοντας για να βρούμε  $y(t_n + \frac{h}{2}) \approx y(t_n) + \frac{h}{2} y'(t_n)$

$$\approx y_n + \frac{h}{2} f(t_n, y_n)$$



$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t)) dt \approx h \cdot f(t_n, y(t_n))$$

$$\approx y(t_n) + h f(t_n + \frac{h}{2}, y(t_n + \frac{h}{2}))$$

$$\left\{ \begin{array}{l} k_1 = f(t_n, y_n) \\ k_2 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1\right) \\ y_{n+1} = y_n + hk_2 \end{array} \right.$$

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \underbrace{f(t, y(t))}_{\text{wavy line}} dt$$

Αριθμητική Ολοκλήρωση.

$$\int_a^b g(s) ds \approx \sum_{i=1}^q w_i g(s_i) \quad , \quad w_i : \text{βάρη} \quad , \quad s_i : \text{κόμβοι}$$

$$\int_a^b g(s) ds \approx \frac{h}{2} g(a) + \frac{h}{2} g(b)$$

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t)) dt \approx h \sum_{i=1}^q b_i f(t_{n,i}, y(t_{n,i}))$$

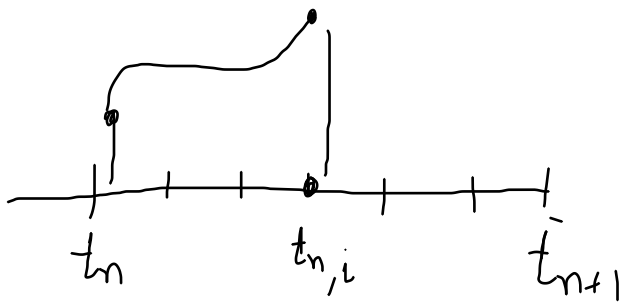
Method:  $y_m \approx y(t_n)$

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=1}^q b_i f(t_{n,i}, \underline{y}_{n,i})$$

$$y_{n,i} \approx y(t_{n,i})$$

$$y(t_{n,i}) = y(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n,i}} f(t, y(t)) dt$$

$$\approx y(t_n) + h \sum_{j=1}^q a_{ij} f(t_{n,j}, y(t_{n,j}))$$



$$y_{n,i} = y_n + h \sum_{j=1}^q a_{ij} f(t_{n,j}, y_{n,j}), \quad i=1, \dots, q$$

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=1}^q b_i f(t_{n,i}, y_{n,i})$$

Για τον υπολογισμό των  $y_{n,i}$  χρειάζεται να έχουμε  $q \times q$  συντάξα (μν-γραμμική συνάρτηση)

-Απλά παραδοί Runge-Kutta  $a_{ij} = 0, \quad i \leq j$

Πολύπλοκες παραδοί Runge Kutta  $a_{ij} \neq 0, \quad i \leq j$

Μέθοδος Butcher.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1q} \\ a_{21} & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{q1} & \dots & a_{qq} \end{pmatrix},$$

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_q \end{pmatrix},$$

$$c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_q \end{pmatrix}$$

$$t_{n,j} = t_n + c_j h, \quad j=1, \dots, q$$

$$\frac{A}{b^T} | c$$

- Άγες τριών γράφων :

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=1}^q b_i k_{n,i}$$

$$k_{n,i} = f\left(t_{n,i}, y_n + \sum_{j=1}^q a_{ij} k_{n,j}\right), \quad i=1, \dots, q$$