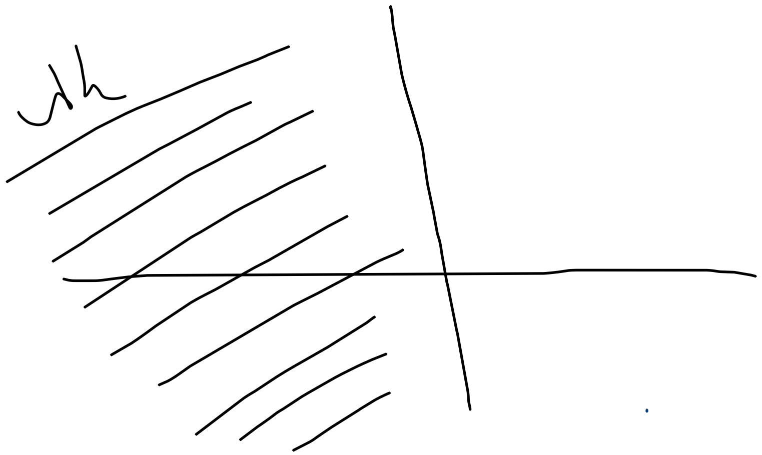
Άσκηση: Δείξτε ότι η μέθοδος του τραπεζίου είναι Α-ευσταθής.

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left(f_{n+1} + f_n\right)$$

$$\begin{cases} y'(t) = \lambda y(t) \\ y(0) = 1 \end{cases}, \qquad Re(\lambda) < 0$$

Είναι $\{y_n\}$ φραγμένες για κάθε επιλογή h και κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$, $Re(\lambda) < 0$



$\pi(J, h\lambda) = J - 1 - \frac{h\lambda}{2}(J+1)$

Είναι αναγκαίο οι ρίζες (μόνο μια εδώ) να είναι $|J| \leq 1$

$J = \dfrac{1 + \frac{h\lambda}{2}}{1 - \frac{h\lambda}{2}}$, $|J| \leq 1$.

$z = \frac{h\lambda}{2}$, $Re(z) < 0$ και $J = \dfrac{1+z}{1-z}$

Θέλουμε να δείξουμε $\dfrac{|1+z|}{|1-z|} \leq 1$ ή $|1+z| \leq |1-z|$

ή $|1+z|^2 \leq |1-z|^2$

ή $(1+z)(1+\bar{z}) \leq (1-z)(1-\bar{z})$

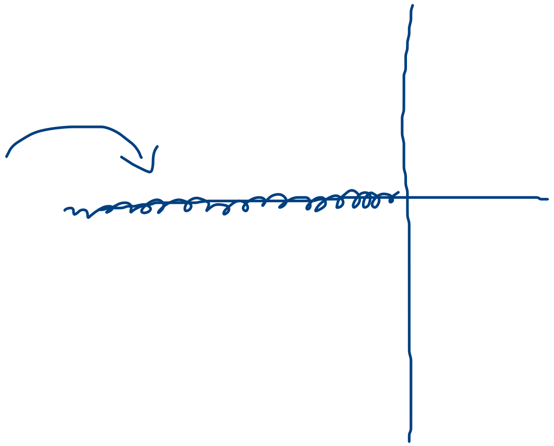
ή $1 + z + \bar{z} + |z|^2 \leq 1 - (z+\bar{z}) + |z|^2$ ή $2Re(z) \leq -2Re(z)$ ισχύει για κάθε z, $Re(z) < 0$

Άσκηση: Έστω η μέθοδος $y_{n+2} - y_{n+1} = \frac{h}{4}\left(f_{n+2} + 2f_{n+1} + f_n\right)$.

Δείξτε ότι είναι A_0-ευσταθής.

$$\begin{cases} y'(t) = \lambda y(t), & \lambda < 0, \ \lambda \in \mathbb{R} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

A_0-ευσταθής $\quad \lambda h$



Για να εξετάσουμε την απόλυτη ευστάθεια μιας πολυβηματικής μεθόδου

$\pi(\zeta;\lambda h) = \rho(\zeta) - \lambda h \sigma(\zeta)$, το $\pi(\zeta)$ ικανοποιεί τη συνθήκη των ριζών.

$$p(\zeta) = \zeta^2 + a\zeta + b$$

i) $b \leq 1$, ii) $\begin{cases} 1+b > |a| \\ 1+b = |a|, \text{ ώστε } b < 1 \end{cases}$

$$\rho(\zeta) = \zeta^2 - \zeta, \quad \sigma(\zeta) = \frac{1}{4}(\zeta^2 + 2\zeta + 1)$$

$$\pi(\zeta; z) = \rho(\zeta) - z\sigma(\zeta) = \zeta^2 - \zeta - z/4(\zeta^2 + 2\zeta + 1)$$

$$= (1 - z/4)\zeta^2 - \left(1 + \frac{z}{4}\right)\zeta - \frac{z}{4}$$

Υποθέτουμε $z < 0$, $1 - z/4 > 0$

Άρα $a = -\dfrac{1 + z/4}{1 - z/4}$, $b = -\dfrac{z/4}{1 - z/4}$

Θέλουμε να ελέγξουμε $b \le 1$.

$$b = -\frac{\frac{z}{4}}{1-\frac{z}{4}} \le 1 \quad \text{ή} \quad -\frac{z}{4} \le 1 - \frac{z}{4} \quad \text{ισχύει για κάθε } z<0$$

$\underline{1+b > |a|}$ ή

$$1 - \frac{z/4}{1-z/4} > \frac{|1+z/4|}{1-z/4}.$$

ή $$1 - \frac{z}{4} - \frac{z}{4} > \left|1 + \frac{z}{4}\right|$$

ή $$-1 + \frac{z}{2} < 1 + \frac{z}{4} < 1 - \frac{z}{2}.$$

ή $-2 < \frac{z}{4} - \frac{z}{2} = -\frac{z}{2}$ (ισχύει) και $\frac{z}{4} < -\frac{z}{2}$ (ισχύει)

Άρα η μέθοδος είναι A_0-ευσταθής.

Άσκηση: Δείξτε ότι όλες οι γραμμικές μέθοδοι της οικογένειας

$$y_{n+2} + (\vartheta-2)y_{n+1} + (1-\vartheta)y_n = \frac{h}{4}\left((6+\vartheta)f_{n+2} + 3(\vartheta-2)f_n\right), \vartheta\in\mathbb{R}$$

είναι A_0-ευσταθείς

Για ποια ϑ οι μέθοδοι είναι ευσταθείς & συνεπείς;

$$\rho(z) = z^2 + (\vartheta-2)z + (1-\vartheta) \quad , \quad \sigma(z) = \frac{1}{4}\left((6+\vartheta)z^2 + 3(\vartheta-2)\right)$$

$$\rho(1) = 1 + (\vartheta-2) + (1-\vartheta) = 0 \quad \forall\vartheta$$

$$\rho'(z) = 2z + (\vartheta-2) \quad , \quad \rho'(1) = 2+\vartheta-2 = \vartheta$$

$$\sigma(1) = \frac{1}{4}\left((6+\vartheta) + 3(\vartheta-2)\right) = \frac{1}{4}(6+\vartheta+3\vartheta-6) = \frac{4\vartheta}{4} = \vartheta$$

$$\rho'(1) = \sigma(1) \quad \forall\vartheta$$

Για καθε ϑ η μέθοδος είναι συνεπής.

Για ποια θ του $\rho(z)$ ικανοποιεί τη συνθήκη των ριζών.

$$\Delta = (\theta-2)^2 - 4(1-\theta) = \theta^2 \quad , \quad z_{1,2} = \frac{-(\theta-2) \pm \theta}{2} = \begin{cases} 1 \\ 1-\theta \end{cases}$$

Για να ικανοποιείται η συνθήκη των ριζών.

$$|1-\theta| \leq 1 \quad , \quad \theta \neq 0 \qquad 1-\theta \neq 1 .$$

$$-1 \leq 1-\theta < 1 \iff \theta \in (0,2]$$ η μέθοδος είναι ευσταθής.

Για την απόλυτη ευστάθεια $\pi(\zeta; h\lambda) = \rho(\zeta) - h\lambda\, \sigma(\zeta)$

Για A_0-ευστάθεια αρκεί $\lambda < 0$, $z = h\lambda < 0$.

$$\pi(\zeta, z) = \left(1 - \tfrac{z}{4}(6+\theta)\right)\zeta^2 + (\theta-2)\zeta + \left[(1-\theta) - \tfrac{z}{4}3(\theta-2)\right]$$

$$a = \frac{\theta - 2}{1 - \frac{z}{4}(6+\theta)} \qquad b = \frac{1-\theta - \frac{3}{4} z (\theta - 2)}{1 - \frac{z}{4}(6+\theta)}$$

Αν $\theta \in (0,2]$ ισχυει ότι η ικανοποιεί τη συνθήκη των ριζών (;)

$b \le 1$ ✓

Επειδή $z<0$, $1 - \frac{z}{4}(6+\theta) > 0$

$$1 - \theta - \frac{3}{4} z (\theta - 2) \le 1 - \frac{z}{4}(6+\theta)$$

ή $\frac{z}{4}\left(6+\theta - 3(\theta-2)\right) \le \theta$

ή $\frac{z}{4}(12 - 2\theta) \le \theta$ Για $\theta \in (0,2]$ ισχύει η γνήσια ανισότητα.

$1+b > |a|$ ✓

$$1 + \frac{1-\vartheta - 2\frac{3}{4}(\vartheta-2)}{1-\frac{2}{4}(6+\vartheta)} > \left|\frac{\vartheta-2}{1-\frac{2}{4}(6+\vartheta)}\right| = \frac{2-\vartheta}{1-\frac{2}{4}(6+\vartheta)}, \quad \vartheta \in (0,2]$$

$$1-\frac{2}{4}(6+\vartheta) + 1 - \vartheta - 2\frac{3}{4}(\vartheta-2) > 2-\vartheta$$

ή $-\frac{2}{4}(6+\vartheta) - \frac{2}{4}3(\vartheta-2) > 0$

ή $-\frac{2}{4}\left(6+\vartheta+3(\vartheta-2)\right) = -\frac{2}{4}4\vartheta > 0$ ισχύει

$1+b=|a|$ δεν θα ισχύει για $\vartheta \in (0,2]$

Άρα όλες οι μέθοδοι για $\vartheta \in (0,2]$ είναι A_0-ευσταθείς.