Runge-Kutta

<u>Μονοβηματικές</u> : $t_n \to t_{n+1}$ χρησιμοποιούμε ενδιάμεσες προσεγγίσεις. ο αριθμός του καλείται και στάδια.

$$y_n \approx y(t_n) \qquad y_{n+1} \approx y(t_{n+1})$$

$$y_{n,i} \approx y(t_{n,i}) \qquad t_{n,i} = t_n + \tau_i h \quad , \quad 0 \le \tau_i \le 1$$

$$y(t_{n,i}) = y(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n,i}} f(t, y(t))\,dt$$

$$y_{n,i} = y_n + h \sum_{j=1}^{q} a_{ij} f(t_{n,j}, y_{n,j}) \, ,$$

$\{a_{ij}\}$ είναι τα βάρη του κανόνα αρ. ολοκλ. $\int_0^{\tau_i} \psi(s)ds$ με κόμβους στο $[0,1]$, τ_j, $j=1,\dots,q$

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=1}^{q} b_i f(t_{n,i}, y_{n,i})$$

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t))\,dt \quad ,$$

b_i τα βαρη του καν. αρ. ολοκληρωσης $\int_0^1 \psi(s)\,ds$, με κομβους τ_i, $i=1,..,q$

$$\begin{array}{c|c} A & \tau \\ \hline b^T & \end{array}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1q} \\ \vdots & & \\ a_{q1} & \cdots & a_{qq} \end{pmatrix} \qquad \tau = \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \vdots \\ \tau_q \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_q \end{pmatrix}$$

$$\int_0^{\tau_i} \psi(s)\,ds \approx \sum_{j=1}^{q} a_{ij}\,\psi(\tau_j)$$

$$\psi = 1 \qquad \tau_i = \sum_{j=1}^{q} a_{ij}$$

$$\int_0^{1} \psi(s)\,ds \approx \sum_{i=1}^{q} b_i\,\psi(\tau_i)$$

$$\psi = 1 \qquad 1 = \sum_{i=1}^{q} b_i$$

Το μητρώο $\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline & 1 \end{array}$ περιγράφει την μέθοδο του Euler.

$a_{11}=0$, $c_1=0$, $b_1=1$ $\quad t_{n,1}=t_n+0\cdot h=t_n$.

$y_{n,1}=y_n+0=y_n$.

$y_{n+1}=y_n+hf(t_n,y_n)$

Το μητρώο $\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline & 1 \end{array}$ περιγράφει την πεπλεγμένη Euler.

$a_{11}=1$, $c_1=1$, $b_1=1$ $\quad t_{n,1}=t_n+h=t_{n+1}$

$y_{n,1}=y_n+hf(t_{n,1},y_{n,1})=y_n+hf(t_{n+1},y_{n,1})$

$y_{n+1}=y_n+hf(t_{n+1},y_{n,1})$

Αν h κατάλληλα μικρό τότε η πεπλεγμένη Euler ορίζεται, έχει μοναδική λύση.

για $g(x) = y_n + h f(t_{n+1}, x)$ είναι συστολή και υπάρχει μοναδικό σημείο

σημείο $y_{n,1}$, $y_{n,1} = y_n + h f(t_{n+1}, y_{n,1})$

$$y_{n+1} = y_{n,1}$$

Το μητρώο

$$\begin{array}{c|c} 1/2 & 1/2 \\ \hline & 1 \end{array}$$

$t_{n,1} = t_n + \frac{1}{2} h$, $y_{n,1} = y_n + h \cdot \frac{1}{2} f(t_{n,1}, y_{n,1}) = y_n + \frac{h}{2} f(t_n + \frac{h}{2}, y_{n,1})$

$$y_{n+1} = y_n + h f(t_{n,1}, y_{n,1})$$

Για κατάλληλα μικρό h η $g(x) = y_n + \frac{h}{2} f(t_n + \frac{h}{2}, x)$ είναι συστολή. Υπάρχει μοναδικό σταθερό σημείο $y_{n,1}$ τ.ω.

$$y_{n,1} = y_n + \frac{h}{2} f(t_n + \frac{h}{2}, y_{n,1}) \Rightarrow 2y_{n,1} = 2y_n + h f(t_n + h/2, y_{n,1})$$

$$y_{n+1} = y_n + h f(t_n + \frac{h}{2}, y_{n,1})$$

$$2y_{n,1} = 2y_n + y_{n+1} - y_n = y_{n+1} + y_n \Rightarrow y_{n,1} = \frac{y_n + y_{n+1}}{2}$$

Έχουμε την πεπλεγμένη μέθοδο $y_{n+1} = y_n + hf\left(t_n + \frac{h}{2}, \frac{y_n + y_{n+1}}{2}\right)$

Αυτή η RK καλείται μέθοδος του μέσου (Προσοχή διαφορετική από 2-βηματική μέθοδο του μέσου)

Θεωρούμε το μητρώο

$$
\begin{array}{cc|c}
0 & 0 & 0 \\
1/2 & 1/2 & 1 \\
\hline
1/2 & 1/2 &
\end{array}
$$

$$t_{n,1} = t_n + 0h = t_n \quad , \quad t_{n,2} = t_n + 1 \cdot h = t_{n+1}$$

$$y_{n,1} = y_n + 0 = y_n .$$

$$y_{n,2} = y_n + h\left(\frac{1}{2} f(t_{n,1}, y_{n,1}) + \frac{1}{2} f(t_{n,2}, y_{n,2})\right)$$

$$= y_n + h/2\left(f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_{n,2})\right)$$

Για καταλληλα μικρο h, $g(x) = y_n + \frac{h}{2}\left(f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, x)\right)$ ειναι συστολη

Εχουμε μοναδικη $y_{n,2}$, $y_{n,2} = y_n + \frac{h}{2}\left(f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_{n,2})\right)$

Ομοια οπως πριν καταληγουμε.

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left(f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_{n+1})\right)$$

Ένα άλλο παράδειγμα είναι

$$\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ \hline 0 & 1 & \end{array}$$

$$t_{n,1} = t_n, \quad t_{n,2} = t_n + \frac{h}{2}, \quad y_{n,1} = y_n, \quad y_{n,2} = y_n + \frac{h}{2} f(t_n, y_n)$$

$$y_{n+1} = y_n + h\left(0 \cdot f(t_n, y_n) + 1 \cdot f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} f(t_n, y_n)\right)\right)$$

Ονομάζεται βελτιωμένη μέθοδος του Euler
ή άλλως μέθοδος του μέσου.

Ένα παράδειγμα πεπλεγμένης RK.

$$\begin{array}{cc|c} \mu & 0 & \mu \\ 1-2\mu & \mu & 1-\mu \\ \hline 1/2 & 1/2 & \end{array} \quad , \mu \text{ πραγματικό}$$

$$y_{n,1} = y_n + h\mu f(t_{n,1}, y_{n,1})$$

$$y_{n,2} = y_n + h\Big((1-2\mu) f(t_{n,1}, y_{n,1}) + \mu f(t_{n,2}, y_{n,2})\Big)$$

Ημιπεπλεγμένες μέθοδοι $a_{ii} \neq 0$ και $a_{ij} = 0$ $i < j$

Το μητρώο

$$\begin{array}{cc|c} \frac{1}{4} & \frac{1}{4}-\mu & 1/2-\mu \\ 1/4+\mu & 1/4 & 1/2+\mu \\ \hline 1/2 & 1/2 & \end{array}$$

$$\mu = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

(Gauss - Legendre)

(Τάξη ακρίβειας $p=4$)

$$y_{n,1} = y_n + h\left(\frac{1}{4} f(t_{n,1}, y_{n,1}) + \left(\frac{1}{4}-\mu\right) f(t_{n,2}, y_{n,2}) \right)$$

$$y_{n,2} = y_n + h\left(\left(\frac{1}{4}+\mu\right) f(t_{n,1}, y_{n,1}) + \frac{1}{4} f(t_{n,2}, y_{n,2}) \right)$$

$$Y = \begin{pmatrix} y_{n,1} \\ y_{n,2} \end{pmatrix} = F(Y), \quad F(Y) = \begin{pmatrix} y_n + \dots \\ y_n + \dots \end{pmatrix}$$

Κλασική <u>μέθοδος</u> R-K.

$$
\begin{array}{cccc|c}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\
0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
\hline
1/6 & 1/3 & 1/3 & 1/6 &
\end{array}
$$