Επιλυσιμότητα των μεθόδων R-K.

$y_n \to y_{n+1}$ υπάρχει (;)

- Άμεση R-K. τότε είναι προφανές ότι μπορούμε να υπολογίσουμε

$$y_{n,i} = y_n + h\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\, f(t_{n,j}, y_{n,j}) \quad , \quad i=1,\dots,q$$

$$y_{n+1} = y_n + h\sum_{i=1}^{q} b_i\, f(t_{n,i}, y_{n,i})$$

Υποθέτουμε ότι f ικανοποιεί την (ολική) συνθήκη Lipschitz

$$\exists L \geq 0 \quad \forall t\in[a,b] \quad \forall y_1,y_2\in\mathbb{R} \quad |f(t,y_1)-f(t,y_2)| \leq L|y_1-y_2|$$

Πρόταση: Έστω ότι η f ικανοποιεί την (ολική) συνθήκη Lipschitz και $h < \frac{1}{\gamma}$

όπου $\gamma = L \cdot \max_{1 \le i \le q} \sum_{j=1}^{q} |a_{ij}|$

Τότε το σύστημα $y_{n,i} = y_n + h \sum_{j=1}^{q} a_{ij} f(t_{n,j}, y_{n,j})$, $1 \le i \le q$.

λύνεται μονοσήμαντα ως προς $(y_{n,1}, y_{n,2}, \dots, y_{n,q})$

Απόδειξη: Θεωρούμε την απεικόνιση $F : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^q$

$$F_i(x) = y_n + h \sum_{j=1}^{q} a_{ij} f(t_{n,j}, x_j), \quad i = 1, \dots, q \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_q \end{pmatrix}$$

$$F(x) = \begin{pmatrix} F_1(x) \\ \vdots \\ F_q(x) \end{pmatrix}$$

Αν η F έχει σταθερό σημείο $\tilde{y} \in \mathbb{R}$.
$F(\tilde{y}) = \tilde{y}$

Αν η $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, είναι συστολή $|g(x)-g(y)| \le L|x-y|$, $L<1$.

Στην περίπτωση που έχουμε μια διανυσματική συνάρτηση

μετράμε την απόσταση: $\|x\|_\infty = \max\limits_{1\le i\le q} |x_i|$, $x\in\mathbb{R}^q$

$\|F(x)-F(\tilde{x})\|_\infty \le M \|x-\tilde{x}\|_\infty$, $M<1$ (Τότε θα έχουμε συστολή)
$\forall x,\tilde{x}\in\mathbb{R}^q$

Για κάθε συνιστώσα της F θα έχουμε

$$|F_i(x)-F_i(\tilde{x})| = h\left|\sum_{j=1}^{q} a_{ij}\left(f(t_{n_j},x_j)-f(t_{n_j},\tilde{x}_j)\right)\right|$$

$$\le h L \sum_{j=1}^{q} |a_{ij}|\,|x_j-\tilde{x}_j|$$

$$|F_i(x) - F_i(\tilde{x})| \le \left(h L \sum_{j=1}^{q} |a_{ij}|\right) \max_{1\le j\le q} |x_j - \tilde{x}_j|$$

$$\le h \cdot \gamma \max_{1\le j\le q} |x_j - \tilde{x}_j| \qquad i=1,\dots,q.$$

Επομένως $\|F(x)-F(\tilde{x})\|_\infty \le h\gamma \|x-\tilde{x}\|_\infty$.

Αρκεί να πάρουμε $h < \frac{1}{\gamma}$. ώστε θα έχουμε ότι η F είναι συστολή.

Άρα υπάρχει μοναδική λύση $(y_{n,1},\dots, y_{n,q})$ που δίνει η μέθοδος R-K.

Για συστήματα Δ.Ε που θέλουμε να εφαρμόσουμε

μια πεπλεγμένη R-K τότε υπάρχει ανάλογο αποτέλεσμα και για

κατάλληλα μικρό h, υπάρχει μοναδική λύση που είναι τις

ενδιάμεσες προσεγγίσεις της μεθόδου R-K.