Ευστάθεια μεθόδων R-K

Λήμμα: Αν δ είναι θετικός αριθμός και $K, d_0, d_1, d_2, \dots$ μη-αρνητικοί αριθμοί

$$d_{i+1} \leq (1+\delta) d_i + K \quad , \quad i=0,1,2,\dots$$

Τότε

$$d_n \leq d_0 e^{n\delta} + K \frac{e^{n\delta}-1}{\delta} \quad , \quad n=0,1,2,\dots$$

Απόδειξη: $n=0$ προφανές

Θα δείξουμε επαγωγικά ότι

$$d_n \leq (1+\delta)^n d_0 + K\left[1 + (1+\delta) + \dots + (1+\delta)^{n-1}\right]$$

$d_1 \leq (1+\delta) d_0 + K$ ισχύει.

Έστω ότι ισχύει για n να το δείξουμε για το $n+1$

$$d_n \le (1+\delta)^n d_0 + K\left[1 + (1+\delta) + \dots + (1+\delta)^{n-1}\right] \quad \text{ισχύει)}$$

$$d_{n+1} \le (1+\delta) d_n + K$$

$$\le (1+\delta)\left\{(1+\delta)^n d_0 + K\left[1 + \dots + (1+\delta)^{n-1}\right]\right\} + K.$$

$$\le (1+\delta)^{n+1} d_0 + K(1+\delta) + K(1+\delta)^2 + \dots + (1+\delta)^n + K$$

$$= (1+\delta)^{n+1} d_0 + K\left[1 + \dots + (1+\delta)^n\right] \quad \text{ω δείξατε.}$$

Επειδή $\delta > 0$ έχουμε $(1+\delta) \le e^{\delta}$

$$d_n \le e^{n\delta} d_0 + K \cdot \frac{(1+\delta)^n - 1}{\delta} \le e^{n\delta} d_0 + K\,\frac{e^{n\delta} - 1}{\delta}$$

Ευστάθεια R-K.

Ορισμός: Μια μέθοδος R-K λέγεται ευσταθής αν για κάθε πρόβλημα ΠΑΤ

$$y'(t)=f(t,y(t)) \quad a\le t\le b \quad y(a)=y_0$$

και αν η f ικανοποιεί τη συνθήκη Lipschitz (ολική) τότε υπάρχει μια σταθερά C, ανεξάρτητη του h, τέτοια ώστε για τις ακολουθίες $y_0,\dots,y_N$ και $z_0,\dots,z_N$ οι προκύπτουν με βάση τη μέθοδο RK

$$\begin{cases} y_{n,i} = y_n + h\sum_{j=1}^{q} a_{ij} f(t_{n,j},y_{n,j}), & 1\le i\le q \\ y_{n+1} = y_n + h\sum_{i=1}^{q} b_i f(t_{n,i},y_{n,i}) & 0\le n\le N-1 \end{cases}$$

και

$$\begin{cases} z_{n,i} = z_n + h\sum_{j=1}^{q} a_{ij} f(t_{n,j},z_{n,j}) & 1\le i\le q \\ z_{n+1} = z_n + h\sum_{i=1}^{q} b_i f(t_{n,i},z_{n,i}) & 0\le n\le N-1 \end{cases}$$

ισχύει

$$\max_{1\le n\le N} |y_n-z_n| \le C\,|y_0-z_0|$$

Πρόταση: Έστω μια μέθοδος R-K και $h < 1/\gamma$.

$$\gamma = L \max_{1 \le i \le q} \sum_{j=1}^{q} |a_{ij}|$$

όπου L σταθερά Lipschitz (ομοιόμορφη σταθερά Lipschitz) για τη f.

και έστω $y_0, \dots, y_N$ οι προσεγγίσεις που παίρνουμε με βάση τη μέθοδο RK

και επιπλέον θεωρούμε τις ποσότητες $z_0, \dots, z_N$ τ.ω.

$$z_0 \in \mathbb{R}$$

$$z_{n,i} = z_n + h \sum_{j=1}^{q} a_{ij} f(t_{n,j}, z_{n,j}) \quad , 1 \le i \le q$$

$$z_{n+1} = z_n + h \sum_{i=1}^{q} b_i f(t_{n,i}, z_{n,i}) + \rho_n$$

όπου $\rho_0, \rho_1, \dots, \rho_{N-1}$, δοσμένοι αριθμοί

Ώστε υπάρχουν σταθερές C_1, C_2 ανεξάρτητες του h τ.ω.

$$\max_{1\le n\le N} |y_n - z_n| \le C_1 |y_0 - z_0| + \frac{C_2}{h} \max_{0\le n\le N-1} |\rho_n|$$

Απόδειξη:

$$|y_{n,i} - z_{n,i}| \le |y_n - z_n| + hL \sum_{j=1}^{q} |a_{ij}| \, |y_{n,j} - z_{n,j}|$$

$$\le |y_n - z_n| + h \cdot \gamma \max_{1\le j\le q} |y_{n,j} - z_{n,j}|$$

$$\max_{1\le i\le q} |y_{n,i} - z_{n,i}| \le |y_n - z_n| + h\gamma \max_{1\le i\le q} |y_{n,i} - z_{n,i}|$$

$$\max_{1\le i\le q} |y_{n,i} - z_{n,i}| \le \frac{1}{1-h\gamma} |y_n - z_n|$$

Επομένως υπάρχει μια σταθερά $C > 0$ τ.ω.

$$|y_{n,i} - z_{n,i}| \leq C\, |y_n - z_n|$$

Ανάλογα παίρνουμε

$$|y_{n+1} - z_{n+1}| \leq |y_n - z_n| + hL \sum_{i=1}^{q} |b_i|\, |y_{n,i} - z_{n,i}| + |\rho_n|$$

$$\leq \Big(1 + \underbrace{hLC \sum_{i=1}^{q} |b_i|}_{C'}\Big) |y_n - z_n| + |\rho_n|$$

$$(1 + hC')\, |y_n - z_n| + |\rho_n|$$

Σύμφωνα με το λήμμα που έχουμε δείξει προηγουμένως

$$|y_n - z_n| \leq e^{n\cdot hc'} |y_0 - z_0| + \frac{e^{nhc'} - 1}{hc'} \max_{0\leq n\leq N-1} |\rho_n|$$

$$\leq e^{c'(b-a)} |y_0 - z_0| + \frac{e^{c'(b-a)} - 1}{c'h} \max_{0\leq n\leq N-1} |\rho_n|$$

Θα ισχύει και για $\max\limits_{0\leq n\leq N} |y_n - z_n|$.