Τοπικό διακριτοποίησης για μεθόδους RK.

Υποθέτουμε $y'(t)=f(t,y(t))$

η f είναι αρκετά ομαλή, δηλαδή η ακριβής λύση y είναι αρκετά ομαλή συνάρτηση.

Υποθέτουμε ότι το h είναι αρκετά μικρό ώστε η μέθοδος Runge-Kutta να είναι καλά ορισμένη.

Θέλουμε να υπολογίσουμε το σφάλμα αν γνωρίζουμε την ακριβή λύση σε κάθε σημείο t_n.

Αν γνωρίζουμε $y(t_n)$, ορίζουμε τα $\mathcal{Y}_{n,i}$, $i=1,\dots,q$

$$J_{n,i} = y(t_n) + h\sum_{j=1}^{q} a_{ij}\, f(t_{n,j}, J_{n,j}) \quad , \quad i = 1, \dots, q$$

Τότε δ_n τοπικό σφάλμα

$$\delta_n = y(t_{n+1}) - \left\{ y(t_n) + h\sum_{i=1}^{q} b_i\, f(t_{n,i}, J_{n,i}) \right\}$$

Αν $|\delta_n| \le C_1 h^{p+1}$, $p > 0$ τότε λέμε ότι η μέθοδος Runge-Kutta είναι τάξης ακρίβειας p.

Η μέθοδος θα λέγεται συνεπής αν $p \geq 1$.

Προσδιορισμός τάξης ακρίβειας - Μέθοδος Runge-Kutta 1-σταδίου

$$\begin{array}{c|c} a & \tau \\ \hline & b \end{array}$$

$\tau = a$.

Αν η μέθοδος είναι άμεση θα πρέπει $a=0$, $\tau=0$.

$$y_{n,1} = y_n, \quad y_{n+1} = y_n + hb\, f(t_n, y_n)$$

Θεωρούμε το ανάπτυγμα της y στο t_{n+1} ως προς t_n.

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + h\, y'(t_n) + \frac{h^2}{2} y''(t_n) + \frac{h^3}{3!} y'''(\xi), \quad \xi \in (t_n, t_{n+1})$$

Αν παραγωγίσουμε την $f(t, y(t))$ ως προς t.

$$y''(t) = \frac{d}{dt}\left(f(t, y(t)) \right) = f_t(t, y(t)) + f_y(t, y(t)) \cdot y'(t)$$

$$= f_t(t, y(t)) + f(t, y(t)) \cdot f_y(t, y(t))$$

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + h f(t_n, y(t_n)) + \frac{h^2}{2}\left[f_t(t_n, y(t_n)) + f(t_n, y(t_n))\, f_y(t_n, y(t_n)) \right]$$

Θα συμβολίζουμε με $\tilde{f} = f(t_n, y(t_n))$, $\tilde{f}_t = f_t(t_n, y(t_n))$, $\tilde{f}_y = f_y(t_n, y(t_n))$ κ.ο.κ.

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + h\tilde{f} + \frac{h^2}{2}\left[\tilde{f}_t + \tilde{f}\tilde{f}_y \right]$$

Οπότε $\delta_n = y(t_{n+1}) - \left\{ y(t_n) + h b f(t_n, y(t_n)) \right\}$

$$\approx y(t_n) + h\tilde{f} + \frac{h^2}{2}\left[\tilde{f}_t + \tilde{f}\tilde{f}_y\right] - \left\{ y(t_n) + hb\tilde{f} \right\}$$

$$= h\underline{\underline{(1-b)}}\tilde{f} + h^2/2\left[\tilde{f}_t + \tilde{f}\tilde{f}_y\right]$$

Για να είναι συνεπής η μέθοδος θα πρέπει $|\delta_n| \leq Ch^2$

Άρα $\underline{\underline{b=1}}$ Παρατηρούμε ότι αυτή είναι η άμεση Euler.