Υπολογισμός τάξης ακρίβειας για μεθόδους RK.

$$\begin{array}{c|c} 1/2 & 1/2 \\ \hline 1 & \end{array}$$

$$y_{n,1} = y_n + \frac{h}{2} f(t_{n,1}, y_{n,1}), \qquad t_{n,1} = t_n + \frac{h}{2}$$

$$y_{n+1} = y_n + h f(t_{n,1}, y_{n,1})$$

$$\delta_n = y(t_{n+1}) - \{ y(t_n) + h f(t_{n,1}, J_{n,1}) \}, \qquad J_{n,1} = y(t_n) + \tfrac{h}{2} f(t_{n,1}, J_{n,1})$$

Υπολογίζουμε το ανάπτυγμα της με κέντρο το $(t_n, y(t_n))$

$$f(t_{n,1}, J_{n,1}) = f(t_n, J_{n,1}) + \frac{h}{2} f_t(t_n, J_{n,1}) + O(h^2)$$

$$= \tilde{f} + \frac{h}{2} f(t_{n,1}, J_{n,1}) \tilde{f}_y + O(h^2)$$

$$+ \frac{h}{2} \left[\tilde{f}_t + O(h) \quad \right] = \tilde{f} + \frac{h}{2} \left[\tilde{f}_t + \tilde{f}_y \left(\overbrace{\tilde{f} + O(h)}^{f(t_{n,1}, J_{n,1})} \right) \right] + O(h^2)$$

Οπότε

$$f(t_{n+1}, y_{n+1}) = \hat f + \frac{h}{2}\left(\hat f_t + \hat f \hat f_y\right) + O(h^2)$$

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + h\, y'(t_n) + \frac{h^2}{2} y''(t_n) + O(h^3)$$

$$\delta_n = h\left(\tilde f - \hat f\right) + \frac{h^2}{2}\left(\tilde f_t + \tilde f \tilde f_y\right) - \frac{h^2}{2}\left(\hat f + \hat f \hat f_y\right) + O(h^3)$$

$$= O(h^3)$$

Άρα η μέθοδος RK έχει τάξη ακρίβειας τουλάχιστον $p=2$.

Θεωρούμε τώρα το παράδειγμα

$$\begin{cases} y'(t) = t^2 & 0 \le t \le 1 \\ y(0) = 0 \end{cases} \qquad y(t) = \frac{t^3}{3}, \quad t_n = nh$$

$$J_{n,1} = y(t_n) + \frac{h}{2} f\left(t_n + \frac{h}{2}, J_{n,1}\right) = y(t_n) + \frac{h}{2}\left(t_n + \frac{h}{2}\right)^2$$

$$= \frac{t_n^3}{3} + \frac{h}{2}\left(t_n + \frac{h}{2}\right)^2 = \frac{(nh)^3}{3} + \frac{h}{2}\left(\frac{2nh+h}{2}\right)^2 = h^3\left[\frac{n^3}{3} + \frac{1}{8}(2n+1)^2\right]$$

$$f(t_{n,1}, J_{n,1}) = \left(t_n + \frac{h}{2}\right)^2 = \frac{h^2}{4}(2n+1)^2$$

$$\delta_n = y(t_{n+1}) - \left\{ y(t_n) + h f(t_{n,1}, J_{n,1}) \right\} = \frac{(n+1)^3 h^3}{3} - \left(\frac{n^3 h^3}{3} + h^3 \frac{1}{4}(2n+1)^2 \right)$$

$$\frac{(n+1)^3}{3} - \left(\frac{n^3}{3} + \frac{(2n+1)^2}{4}\right) = \frac{4(n^3+3n^2+3n+1) - 4n^3 - 3(4n^2+4n+1)}{12}$$

$$= \frac{4n^3+12n^2+12n+4-4n^3-12n^2-12n-3}{12} = \frac{1}{12}$$

$$\delta_n = h^3 \frac{1}{12}$$

Άρα η μέθοδος έχει τάξη ακρίβειας $p = 2$ (ακριβώς)